Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseiről ütemezéselméleti vonatkozásokkal

PhD értekezés

Készítette:

Lengyelné Szilágyi Szilvia

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Doktori iskola vezető:

Prof. Dr. Tóth Tibor

A műszaki tudomány doktora

Tudományos vezető:

Dr. habil Szigeti Jenő

A matematika tudomány kandidátusa

Miskolc, 2009

A témavezető ajánlása

Lengyelné Szilágyi Szilvia:
"Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseiről ütemezéselméleti vonatkozásokkal" című PhD értekezéséhez

Az értekezés a matematika egy széles körben kutatott ágával a rendezett algebrai struktúrákkal foglalkozik. A vezérfonalat a részbenrendezés kiterjesztései adják, a munka első részében az úgynevezett maximális kompatibilis kiterjesztések metszetének a leírását találjuk, a második részben a részbenrendezés lineáris kiterjesztéseinek (amelyek szintén maximálisak) felhasználásával sikerült a rendezés-kongruenciákról és azoknak a hálójáról új eredményeket kapni. Az értekezés témája az ütemezéselméleti alkalmazhatóság miatt kapcsolódik az informatikához, ezt többek között a negyedik és hatodik fejezetben található algoritmusok is alátámasztják.

A doktori munka 10 darab (8 megjelent és 2 előkészületben levő) cikkre hivatkozik, amelyeket a Jelölt önállóan, illetve társszerzőkkel közösen készített. Ezek a dolgozatok nemzetközi referált (és impakt faktorral rendelkező) folyóiratokban, hazai illetve külföldi konferencia kiadványokban jelentek meg. Az értekezés Lengyelné Szilágyi Szilvia önálló eredményeit tartalmazza és a Hatvany József Doktori Iskola által megkövetelt tartalmi és formai követelményeknek mindenben megfelel. A Jelölt számára a PhD cím megítélését messzemenően támogatom.

Miskolc, 2008. december 29.

Szigeti Jenő
tudományos vezető

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítséget nyújtottak és hasznos tanácsokkal láttak el a disszertáció elkészítése során.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Szigeti Jenőnek tartozom köszönettel, aki nélkül ez a disszertáció soha nem készülhetett volna el. Megköszönöm továbbá Dr. Radeleczki Sándor értékes szakmai tanácsait és hasznos javaslatait.

A Miskolci Egyetem Analízis Tanszékén dolgozó kollégáimnak is köszönettel tartozom, mert támogatták tanulmányaimat, szakmailag segítették munkámat és lehetővé tették dolgozatom megírását.

Végül szeretném megköszönni családomnak, barátaimnak azt, hogy mindenben segítettek, lelkesen bíztattak és végig mellettem álltak.

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

A rendezett algebrai struktúrák elmélete a modern matematika napjainkban is intenzíven kutatott területe. Azok az algebrai struktúrák, amelyek parciális vagy teljes rendezéssel vannak ellátva gyakran megjelennek a matematika különböző diszciplínáiban. A disszertációban részbenrendezések bizonyos kompatibilis kiterjesztéseivel foglalkozunk. Az első részben egyműveletes unáris algebrákban új jellemzését adjuk a maximális kompatibilis kiterjesztéseknek és ezt felhasználva meghatározzuk ezen kiterjesztések metszetét. A második részben lineáris kiterjesztéseket használunk az úgynevezett rendezés-kongruenciák vizsgálatához. A halmaz részbenrendezése algebrai szempontból egyáltalán nem jelent erős kötöttséget. A helyzet azonban rögtön megváltozik, ha rendezéstartó műveletet is tekintünk. Ebben az esetben a vizsgálatok során az alapvető kombinatorikus módszerek mellett megjelennek, sőt gyakran előtérbe kerülnek az algebrában szokásos módszerek.

Az algebra ágai között sok olyan van, amelyekben az elért konkrét eredményeket a matematika egyéb ágaiban, valamint az informatika területén is fel lehet használni. Az ilyen eredmények száma egyre növekszik. Napjainkban, az elméleti számítástudomány által felvetett megoldandó feladatok körében a rendezés talán a leggyakrabban használt fogalmak közé sorolható. A számítástudomány két nagy területén kifejezetten meghatározó szerep jut a rendezésnek. Az elsőt az adatszerkezetek jelentik, itt a rendezés már jól megszokott fogalom. A második tématerületet az optimalizálás jelenti, hiszen gyakori eset, hogy rendezési feladat merül fel az optimalizálási problémák során. Ütemezési, kiválasztási és keresési feladatok kapcsán a megoldást biztosító eljárások általában rendezésen alapulnak. A megoldást adó rendezéseknek rendelkezniük kell a transzformálhatóság tulajdonságával, amely lényegében a részleges illetve a lineáris kiterjesztéseket jelenti adott részbenrendezés esetén, ugyanis ezen kiterjesztések már önmagukban képesek bemutatni az adott ütemezést, kiválasztást.

Az ütemezési problémákban, általánosan fogalmazva, a cél bizonyos tevékenységek elvégzésére olyan időbeosztást találni, amely figyelembe veszi a rendelkezésre álló erőforrásokat, és valamilyen szempont szerint optimális. A klasszikus ütemezéselmélet fontos területét alkotják azok a problémák, ahol adott feladathalmazt kell egy vagy több egységnyi kapacitású erőforráson (processzor vagy gép) optimálisan vagy közel optimálisan beütemezni adott célfüggvény mellett. Szinte minden esetben hatékony (polinomiális futásidejű) egzakt, vagy ahol ez nem lehetséges, approximációs algoritmusok kidolgozása a cél. Ehhez a problémakörhöz szorosan kapcsolódik kutatómunkánk azon gyakorlati alkalmazása, amelyben a részbenrendezett halmaz minimális lineáris rendezés-kongruenciáit használjuk fel olyan ütemezési feladatok megoldásához, ahol adott időegység alatt több egységnyi kapacitású gép is dolgozhat.

1.1 A dolgozat felépítése

Az értekezés első fejezete az irodalmi áttekintés mellett a kutatás célkitűzéseit tartalmazza.

A második fejezetben azokat az alapvető definíciókat és eredményeket olvashatjuk, amelyek a későbbi fejezetek során szolgáltatnak biztos alapot. Részletesen foglalkozunk a részbenrendezett algebrákkal és a rendezés-kongruenciákkal.

A harmadik fejezetben tetszőleges részbenrendezett unáris algebra esetén megadjuk a részbenrendezés maximális kompatibilis, azaz kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek új jellemzését, megteremtve ezáltal annak a lehetőségét, hogy Szpilrajn tételét tovább általánosíthassuk. A fejezet végén így teljes leírást tudunk adni egy részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetéről.

A disszertáció negyedik fejezete szorosan kapcsolódik az előző fejezet eredményeihez. Ebben a fejezetben két alkalmazást mutatunk be. Az első elméleti jellegű. Ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra esetén adunk meg egy speciális kompatibilis részbenrendezést, amelynek lezártját is meghatározzuk. Második alkalmazásunk konkrétabb, bár közel sem triviális. Itt nem követeljük meg az f függvény ciklusmentességét, így a megadott részbenrendezés esetén a lezárt néhány elemének meghatározásához a metszet pontos leírását kimondó tételünket alkalmazzuk. A harmadik fejezet eredményeinek algoritmizálhatóságát felhasználva a metszet valamennyi elemének meghatározására szolgáló számítógépes program bemutatásával folytatódik dolgozatunk. A program megírásához felhasznált algoritmusok pszeudokódjait részletesen tartalmazza ez a fejezet.

Az értekezés ötödik fejezete a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáival foglalkozik. Ebben a fejezetben ezen kongruenciák fontosabb tulajdonságait tekintjük át és megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatban állnak a részbenrendezett halmaz intervallum-kongruenciáival. Vizsgáljuk továbbá a rendezés-kongruenciák hálójának tulajdonságait. A hatodik fejezet az ötödik fejezet eredményeinek ütemezéselméleti vonatkozásait tartalmazza.

A hetedik fejezetben az új tudományos eredményeket és az értekezés téziseit fogalmazom meg. A nyolcadik fejezetben a további kutatási feladatok közül mutatok be néhányat.

Az utolsó két számozott fejezet az elvégzett kutatásokról ad tömör összefoglalást magyar és angol nyelven.

1.2 Irodalmi áttekintés

A részbenrendezett halmazok és a hálók elméletének tanulmányozása jelentette kutatási témámhoz az elméleti alapot. E két témakör szorosan kapcsolódik egymáshoz, így a kiindulópontként felhasznált irodalom jelentős része mindkét témakörben hasznosnak bizonyult. A magyar nyelven íródott művek közül Szász Gábor klasszikusnak számító *Bevezetés a hálóelméletbe* című könyvét ([47]), Czédli Gábor modernebb hangvételű *Hálóelmélet* jegyzetét ([9]) és Szigeti Jenő *Algebra* jegyzetét ([50]) emelném ki. Az angol nyelvű irodalomban is könnyen találunk jól használható forrásokat. Ezek egyikét a Davey-Priestley szerzőpáros által írt *Introduction to Lattices and Order* című monográfia jelenti ([12]). Egy másik mértékadó forrást William T. Trotter *Combinatorics and Partially Ordered Sets, Dimension Theory* című könyve jelent ([54]). A kiemelt művek mellett a [4], [27] és [42] könyveket is használtuk.

A geometria alapjaira vonatkozó kutatások kapcsán keletkezett a rendezett struktúrák elmélete. E témakör alapművének Fuchs László *Partially Ordered Algebraic Systems* című könyve számít ([23]). A rendezett algebrák elméletének egyik sarkalatos problémája, hogy egy (A, F, r) részbenrendezett algebrai struktúra esetén az r részbenrendezés R kompatibilis lineáris kiterjesztésének létezésére szükséges és elégséges feltételt adjon meg. A klasszikus algebrai struktúrákban, tehát amikor (A, F) csoport vagy gyűrű, a lineáris kiterjesztésekkel kapcsolatos problémák köre alaposan kidolgozott, bőséges irodalom található hozzá (pl. [23], [51]). A részbenrendezett halmazok elméletének egyik alappillére a részbenrendezés lineárissá való kiterjeszthetőségét kimondó Szpilrajn tétel a legegyszerűbb esetben, azaz $F = \varnothing$ esetén ad választ a fenti kérdésre ([52]). Bonyolultabb, de még kezelhető helyzet keletkezik akkor, ha egy rendezéstartó függvényt (egyváltozós műveletet) is tekintünk az alaphalmazon. Az első lépéseket ebben az irányban Frasnay ([22]), majd később Szigeti, Nagy ([48]) és Lengvárszky ([34]) tették meg. Ha $F = \{f\}$ és $f : A \to A$ egyváltozós művelet, akkor a kompatibilis (rendezéstartást megőrző) lineáris kiterjesztés létezésének szükséges és elégséges feltételét Szigeti és Nagy cikkében találjuk. A szerzők lényegében a Szpilrajn tételt általánosították [48] dolgozatukban, amelyben igazolták, hogy ha (A, r) részbenrendezett halmaz és $f : A \to A$ olyan ciklusmentes függvény, amely kompatibilis a $\leq_r$ relációra nézve, akkor r kiterjeszthető lineárissá úgy, hogy a R lineáris kiterjesztés szintén kompatibilis tulajdonságú.

Földes István és Szigeti Jenő [20] dolgozatukban bevezették az f-tiltott elempár fogalmát és ezen párok alkalmazásával megadták az f-kvázilinearitás fogalmát kompatibilis részbenrendezések esetén. A szerzők [20]-ban megmutatták, hogy az (A, f) unáris algebra minden kompatibilis részbenrendezése kiterjeszthető úgynevezett f-kvázilineáris részbenrendezéssé. Az említett tétel figyelemre méltó következménye, hogy a maximális kompatibilis részbenrendezések (adott f esetén) valójában a kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezések az (A, f) unáris algebrán. A rendezéstartást megőrző maximális - tehát nem feltétlenül lineáris - kiterjesztésekről ad tehát teljes leírást [20].

A kompatibilis lineáris kiterjesztések metszetének leírása ciklusmentes részbenrendezett $(A, f, \leq_r)$ unáris algebra esetén Szigeti [49] dolgozatában olvasható.

Részbenrendezett halmazokon a kongruencia reláció fogalmára az irodalomban különféle definíciók léteznek. A kongruencia valamennyi megfogalmazásában olyan ekvivalenciarelációként szerepel, amelynek osztályai konvex részhalmazok (pl. [5], [33]). Az utóbbi években számos cikk foglalkozott a félhálók és hálók kongruenciáinak részbenrendezett halmazokra való általánosításával. Valamennyi dolgozatban közös gondolat az, hogy ezen kongruenciák megadhatóak bizonyos izoton függvények magjaiként ([5], [6], [13], [14] és [28]). A rendezés-kongruencia és a rendezésőrző-partíció fogalmát először Trotter vezette be ([54]). Czédli Gábor és Lenkehegyi Attila rendezett algebrákon definiálta a rendezés-kongruencia fogalmát és vizsgálta ezen kongruenciák tulajdonságait ([10], [11]). Felfogásuk több ponton kapcsolódik Bloom korábbi eredményeihez ([2]). Az általuk megadott definícióból a Trotter-féle kongruencia fogalom levezethető.

Az intervallum fogalma a rendezett halmazok elméletében szinte a kezdetektől megtalálható. A részbenrendezett halmaz intervallum dekompozícióira vonatkozó eredmények a [10], [16], [17], [18] és [19] cikkekben olvashatóak.

Az értekezésben bemutatott program alapját képező algoritmusok megalkotásához alkalmazott technikát az *Új algoritmusok* ([7]) című könyv alapján tanulmányoztam.

Több ezer különböző ütemezési feladatról találhatunk cikket a szakirodalomban, és számuk egyre nő. Az ütemezéselmélet áttekintéséhez a [32], [39] jegyzeteket, az [1], [30], [38] és [41] könyveket, valamint a [25] cikket használtam. A kitűzött ütemezéselméleti feladat megoldásának kapcsán a hatékony megoldást kínáló mohó algoritmusok felé fordult figyelmünk. Közös jellemzőjük, hogy egy adott lépésben mindig az optimálisnak látszó választást teszik. Ez azt jelenti, hogy a lokális optimumot választják annak reményében, hogy ez majd globális maximumot fog eredményezni. A mohó stratégia egy igen hatékony eszköz, amelynek elsajátítását a [7] és [54] könyvek tették lehetővé számomra.

1.3 A kutatás célja

Tudományos kutatómunkám a részbenrendezett unáris algebrák témaköréhez kapcsolódik. Alapvetően két fő feladat elvégzésére törekedtünk.

A [20], [48] és [49] dolgozatok alapján adódott az ötlet, hogy általánosítsuk [49] eredményeit azokra az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebrákra, amelyekre az $f : A \to A$ függvény ciklusmentességét nem követeljük meg. Ehhez meg kell adnunk az r részbenrendezés maximális kompatibilis, azaz kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén.

A matematikai háttér pontos kidolgozása mellett a felhasznált fogalmak és a bizonyított eredmények szemléltetésére olyan példa megalkotására törekedtünk, amely megfelelő megszorításokkal végessé tehető, így az algoritmusok megadása után számítógépes program írását céloztuk meg. A programmal szemben azt az elvárást támasztottuk, hogy adott környezetben meghatározza az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén az r részbenrendezés valamennyi maximális kompatibilis kiterjesztésének metszetét, továbbá a metszet létrehozásához szükséges lépéssorozatban minden olyan numerikus értéket kiszámítson, amelyek fontos információkat hordoznak. A program tesztelése során természetes módon adódott ezeken felül a futási idő csökkentésének igénye.

Az irodalom alapos tanulmányozása után a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak és intervallum-kongruenciáinak vizsgálatával foglalkoztunk. Keressük ezen kongruenciák fontosabb tulajdonságait, feltárjuk a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és intervallum-kongruenciái közötti kapcsolatokat, valamint a lineáris kiterjesztésekkel összefüggő momentumokat.

Elméleti eredményeink gyakorlati vonatkozásait az ütemezéselmélet területén vizsgáljuk. A kitűzött feladat olyan ütemezés meghatározása, amely választ ad arra a kérdésre, hogy melyik munkát mikor végezzük, ha adott feladat esetén lehetőség van a párhuzamos munkavégzésre.

2 Fontosabb fogalmak és eredmények

A részbenrendezett halmaz és a háló az algebra alapvető fontosságú fogalmai. Részbenrendezett halmazok ott lépnek fel, ahol a vizsgált objektumok között természetes módon hierarchikus viszonyok létesíthetőek.

Jelen fejezetben a szükséges alapfogalmakat definiáljuk, illetve az irodalomból ismert olyan eredményeket idézünk, melyekre a későbbi számolások, bizonyítások során támaszkodni fogunk. A tudományos előzmények közé sorolt eredmények bizonyítását, a rövidség kedvéért, általában nem közöljük. Kivételt csak indokolt esetben teszünk.

A részbenrendezett halmazok és a hálók elméletéhez számos kiváló magyar és idegen nyelvű forrás kapcsolható ([9], [12], [27], [47], [50], [54]). A forrásmunkaként felhasznált magyar nyelvű monográfiák közül elsősorban Szász Gábor könyvét ([47]) és Czédli Gábor egyetemi jegyzetét ([9]) használtuk. Az angol nyelvű művek közül a [12], [27] és [54] könyvekből merítettünk. A részbenrendezések lineáris, illetve maximális kompatibilis kiterjesztéseihez kapcsolódó fogalmak és eredmények a [20], [48], [49], [52] és [53] dolgozatokban találhatók meg.

2.1 Részbenrendezett halmazok

2.1. Definíció.
Az $r \subseteq A \times A$, $(A \neq \varnothing)$ relációt részbenrendezésnek nevezzük, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Az $x, y \in A$ elemek esetén, ha r részbenrendezés, akkor az $(x, y) \in r$ illetve az xry jelölések mellett az $x \leq_r y$ vagy $x \leq y$ jelöléseket is alkalmazzuk. Ha $r \subseteq A \times A$ részbenrendezés, akkor az (A, r) illetve az $(A, \leq_r)$ párt *részbenrendezett halmaz*nak nevezzük. Az $x, y \in A$ elemekre $x \leq y$ és $x \neq y$ egyidejű teljesülését az $x < y$ jelöléssel fejezzük ki.

Tekintsünk néhány további alapvető fogalmat.

2.2. Definíció.
Az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazban értelmezzük a következőket.

(1) Az $x \in A$ elem rákövetkezője az $y \in A$ elem, ha $x < y$ és nincs olyan $z \in A$ elem, amelyre $x < z < y$ teljesül. Jelölése: $x \prec y$. Az $x \preceq y$ jelölés azt fejezi ki, hogy $x = y$ vagy $x \prec y$.

(2) Az $x, y \in A$ elemeket összehasonlíthatónak nevezzük, ha $x \leq y$ vagy $y \leq x$ teljesül.

(3) Az $x, y \in A$ elemeket összehasonlíthatatlanoknak nevezzük, ha nem összehasonlíthatóak. Ha x és y összehasonlíthatatlanok, akkor az $x \parallel y$ jelölést alkalmazzuk.

(4) A $H \subseteq A$ részhalmazt láncnak nevezzük, ha annak bármely két eleme összehasonlítható. Abban az esetben, ha A lánc, akkor a részbenrendezést lineárisnak nevezzük. Ha r lineáris részbenrendezés A-n, akkor az (A, r) párt szokás teljesen rendezett halmaznak illetve lineárisan rendezett halmaznak nevezni.

(5) A $H \subseteq A$ részhalmazt antiláncnak nevezzük, ha annak bármely két különböző eleme összehasonlíthatatlan.

(6) Az $a \in A$ elemet maximálisnak nevezzük, ha tetszőleges $x \in A$ elemre $a \leq x \Rightarrow a = x$.

(7) Az $a \in A$ elemet minimálisnak nevezzük, ha tetszőleges $x \in A$ elemre $x \leq a \Rightarrow a = x$.

(8) Az $a \in A$ elemet legnagyobbnak nevezzük, ha minden $x \in A$ elemre $x \leq a$.

(9) Az $a \in A$ elemet legkisebbnek nevezzük, ha minden $x \in A$ elemre $a \leq x$.

Vizsgálataink középpontjában a részbenrendezett halmazok bizonyos tulajdonságú kiterjesztései állnak, ezért a következő definícióban megadjuk, hogy mit értünk egy részbenrendezés kiterjesztése alatt.

2.3. Definíció.
Ha (A, r) és (A, R) részbenrendezett halmazok, akkor az R részbenrendezést r kiterjesztésének nevezzük, ha $r \subseteq R$, azaz bármely $x, y \in A$ esetén:

$$x \leq_r y \quad \Rightarrow \quad x \leq_R y.$$

A részbenrendezett halmazokról szóló alapvető eredmények egyike az alábbi tétel ([52]).

2.4. Tétel. (Szpilrajn)
Bármely (A,r) részbenrendezett halmazhoz létezik olyan $\lambda \subseteq A \times A$ lineáris rendezés (az A λ-ra nézve lánc), amelyre $r \subseteq \lambda$. Az ilyen λ lineáris rendezéseket az r lineáris kiterjesztéseinek nevezzük. Ha $L(r)$ jelöli r lineáris kiterjesztéseinek halmazát, akkor

$$\bigcap_{\lambda \in L(r)} \lambda = r.$$

2.5. Definíció.
Egy $r \subseteq A \times A$ reláció tranzitív lezártjának (tranzitív burkának) az

$$\overline{r} = \cap\{\rho \mid r \subseteq \rho \subseteq A \times A, \rho \text{ tranzitív}\}$$

relációt nevezzük.

Egy r reláció k-adik hatványa ($k \geq 1$):

$$r^k = r \circ r \circ ... \circ r \quad (k\text{-szoros reláció szorzat}).$$

Könnyen igazolható, hogy

$$\overline{r} = \cup\{r^k \mid k \geq 1\}.$$

2.2 RÉSZBENRENDEZETT ALGEBRÁK

Vizsgálatainkban fontos szerep jut a kompatibilitási tulajdonságnak. A következőkben definiáljuk, hogy mit értünk e fogalom alatt.

2.6. Definíció.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $f : A \to A$ egyváltozós művelet. f rendezéstartó, ha $x, y \in A$ esetén:

$$x \leq_r y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq_r f(y). \tag{2.1}$$

A 2.6. Definícióban szereplő (2.1) tulajdonságot *természetes kompatibilitási tulajdonság*nak vagy *r-monotonitás*nak is szokás nevezni. A (2.1) tulajdonsággal rendelkező $f : A \to A$ függvény *rendezés endomorfizmus* az $(A, \leq_r)$ páron. A 3. fejezetben a $\leq_r$ részbenrendezés olyan részbenrendezés kiterjesztéseivel foglalkozunk, melyek esetén az f függvény megőrzi rendezés endomorfizmus jellegét, azaz ha $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $f : A \to A$ rendezés endomorfizmus a (2.1) természetes kompatibilitási tulajdonsággal és a R lineáris rendezés r kiterjesztése, akkor

$$x \leq_R y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq_R f(y) \tag{2.2}$$

teljesül minden $x, y \in A$ esetén. Az r részbenrendezés azon R lineáris kiterjesztéseit, amelyek rendelkeznek a (2.2) tulajdonsággal *monotonitást tartó* vagy *f-lineáris kiterjesztéseknek* is szokás nevezni.

Az $\mathcal{A} = (A, F)$ unáris algebrának (minden $f \in F$ művelet egyváltozós) az $r \subseteq A \times A$ *megengedett részbenrendezése*, ha minden $f \in F$ művelet (2.1) tulajdonságú. Ekkor az (A, F, r) hármast *részbenrendezett unáris algebrának* nevezzük. Fuchs László klasszikusnak számító könyvében ([23]) a részbenrendezett algebrák általánosabb definíciója szerepel, számunkra azonban elegendő az általunk megfogalmazott definíció használata.

Ha az $\mathcal{A} = (A, F)$ algebrában $F = \{f\}$, ahol $f : A \to A$ egyváltozós művelet, akkor az $(A, \{f\})$ párt *mono-unáris algebrának* nevezzük. Ha r egy megengedett részbenrendezése az $(A, \{f\})$-nek, akkor (2.1) teljesülésekor az $(A, \{f\}, r)$ hármas *részbenrendezett mono-unáris algebra.* A mono-unáris algebrák jelölésére az $(A, \{f\})$ helyett az (A, f) írásmódot, illetve részbenrendezett mono-unáris algebrákra az $(A, \{f\}, r)$ jelölés helyett az (A, f, r) jelölést alkalmazzuk a továbbiakban. Ha a R lineáris rendezés a r részbenrendezés kiterjesztése, akkor (2.2) teljesülésekor az (A, f, R) hármas az (A, f, r) részbenrendezett mono-unáris algebra lineáris kiterjesztése. A továbbiakban, az egyszerűség kedvéért, a mono-unáris algebra kifejezés helyett az unáris algebra kifejezést használjuk.

Az alábbi definíciókat [48]-ból vettük át.

2.7. Definíció.
Azt mondjuk, hogy egy $f : A \to A$ függvény N lépést tesz az $x \in A$ elemen, ha

$$x, f(x), f^2(x), ..., f^N(x)$$

különböző elemei A-nak és

$$f^{N+1}(x) = f^N(x)$$

teljesül, ahol $N \geq 0$ és $f^0(x) = f(x)$. Az $N = \infty$ is megengedett, ekkor $0 \leq m < n$ esetén

$$f^m(x) \neq f^n(x).$$

2.8. Definíció.
Az $f : A \to A$ függvény ciklusmentes, ha minden $x \in A$ elemhez létezik olyan $0 \leq N = N(x) \leq \infty$, hogy az f függvény N lépést tesz az x elemen.

Egy (A, f, r) részbenrendezett unáris algebrát ciklusmentesnek nevezünk, ha f ciklusmentes. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden lineárisan rendezett unáris algebra ciklusmentes.

Az alábbi, [48]-ban megtalálható lemmára többször támaszkodunk a 3. fejezetben.

2.9. Lemma.
Tegyük fel, hogy az (A, f, r) részbenrendezett unáris algebrában az $f : A \to A$ függvény $N \geq 1$ lépést tesz az $x \in A$ elemen. Ha a $0 \leq p < q \leq N$ egész számokra fennáll, hogy

$$f^p(x) r f^q(x),$$

akkor a $0 \leq k \leq N$ és $0 \leq l \leq N$ egész számok esetén

$$f^k(x) r f^l(x)$$

csak $k \leq l$ esetén teljesülhet.

Egy (A, f, r) részbenrendezett unáris algebra esetén vezessük be az alábbi jelölést:

$$\mathcal{L}(A, f, r) = \{R \mid r \subseteq R \subseteq A \times A \text{ és } R \text{ kompatibilis lineáris rendezés}\}.$$

Az alábbi, [49]-ben megtalálható lemmát is használni fogjuk.

2.10. Lemma.
Tegyük fel, hogy az (A, f, r) ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra $a, b \in A$ elemeire $a r f(a)$ vagy $f(a) r a$. Ekkor

$$(a, b) \in \bigcap_{R \in \mathcal{L}(A,f,r)} R$$

esetén vagy $a = b$, vagy $f^m(a) r f^m(b)$ és $f^m(a) \neq f^m(b)$ valamilyen $m \geq 0$ egészre.

A [48] dolgozatban találjuk meg a következő definícióban szereplő nevezetes elemeket.

2.11. Definíció.
Tegyük fel, hogy az (A, f, r) részbenrendezett unáris algebrában az f függvény N lépést tesz az $x \in A$ elemen. Azt mondjuk, hogy az $x \in A$ elem

(1) $\uparrow$-definit, ha léteznek olyan $0 \leq p < q \leq N$ egészek, amelyekre $f^p(x) r f^q(x)$,

(2) $\downarrow$-definit, ha léteznek olyan $0 \leq q < p \leq N$ egészek, amelyekre $f^p(x) r f^q(x)$,

(3) indefinit, ha $p \neq q$, $0 \leq p \leq N$, $0 \leq q \leq N$, esetén $f^p(x)$ és $f^q(x)$ összehasonlíthatatlan elemek r-re nézve.

A 2.9. Lemma miatt $N \geq 1$ esetén egy elem csak egyféle definit lehet. Az $N = 0$ esetben az elemet indefinitnek tekintjük. A 2.11. Definícióban szereplő elemek felhasználásával értelmezte Szigeti azokat a halmazokat, amelyek segítségével [49]-ben megadta a monotonitást tartó lineáris kiterjesztések metszetét ciklusmentes részbenrendezett unáris algebrák esetén.

A Szpilrajn tétel [48]-ban közölt általánosításához kapcsolódóan Lengvárszky vizsgálta a lineáris kiterjeszthetőség lehetőségét r-antimonoton függvényekre. Először az r-antimonoton függvény definícióját adjuk meg.

2.12. Definíció.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $f : A \to A$ egyváltozós művelet. Az f függvény r-antimonoton, ha $x, y \in A$ esetén:

$$x \leq_r y \quad \Rightarrow \quad f(y) \leq_r f(x) \tag{2.3}$$

Lengvárszky [34] dolgozatában bizonyította az alábbi tételt, amelynek egy következményét a 3. fejezet végén adjuk meg.

2.13. Tétel.
Legyen (A, r) részbenrendezett halmaz és $f : A \to A$ r-antimonoton függvény. Akkor és csak akkor létezik az r részbenrendezésnek olyan λ lineáris kiterjesztése, amelyre nézve az f függvény λ-antimonoton, ha f^2 ciklusmentes és f-nek legfeljebb egy fixpontja van.

[20]-ban Földes és Szigeti a Szpilrajn tételnek egy olyan általánosítását adták, amelyből [48] fő eredménye speciális esetként adódik. A szerzők által bevezetett $\sim_f$ ekvivalenciareláció használata a továbbiakban számunkra is hasznos lesz.

Az $f : A \longrightarrow A$ függvény esetén definiáljuk a $\sim_f$ ekvivalenciarelációt a következőképpen: az $x, y \in A$ elemek esetén $x \sim_f y$, ha $f^k(x) = f^l(y)$ teljesül valamely $k \geq 0$ és $l \geq 0$ egész számokra. Az $x \in A$ elem $\sim_f$ szerinti $[x]_f$ ekvivalencia osztályát az x elem *f-komponensének* nevezzük. Világos, hogy $[x]_f \subseteq A$ részalgebrája (A, f)-nek, azaz

$$f([x]_f) \subseteq [x]_f.$$

Megjegyezzük, hogy $[x]_f$ tartalmazza az x elem *f-orbitját*, azaz:

$$\{x, f(x), \ldots, f^k(x), \ldots\} \subseteq [x]_f \;\; .$$

Egy $c \in A$ elemet *ciklikus elemnek* mondunk f-re vonatkozóan, ha

$$f^m(c) = c$$

teljesül valamilyen $m \geq 1$ egész számra. A $c \in A$ ciklikus elem *periódusa* az

$$n = n(c) = \min\{m \mid m \geq 1 \text{ és } f^m(c) = c\}$$

pozitív egész szám, amely megegyezik a c ciklikus elemet tartalmazó

$$C = \{c, f(c), ..., f^{n(c)-1}(c)\}$$

teljes ciklus elemszámával.

A C halmaz nem más, mint a c elem f-orbitja, továbbá

$$f(C) = C.$$

Ha c ciklikus elem, akkor $f^k(c) = f^l(c), (k > l)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $k - l$ osztható n-nel, ahol n a c ciklikus elem periódusa. Az x elem f-orbitja akkor és csak akkor véges, ha $[x]_f$ tartalmaz ciklikus elemet. Egy ciklikus elem jelenléte $[x]_f$ -ben nem jelenti azt, hogy $[x]_f$ véges halmaz. Az f függvénynek *valódi ciklusa* akkor van, ha létezik olyan $c \in A$ ciklikus elem, amelyre $n(c) \geq 2$. Ha f-nek nincs valódi ciklusa, akkor összhangban a 2.8. Definícióval, f ciklusmentes.

Az f-tiltott pár fogalmát Földes és Szigeti vezették be [20] cikkükben.

2.14. Definíció.
Az $(x, y) \in A \times A$ rendezett elempárt f-tiltott elempárnak nevezzük, ha léteznek olyan $k \geq 0$, $l \geq 0$ és $m \geq 2$ egész számok, amelyekre m nem osztója $(k - l)$-nek, az

$$f^k(x), f^{k+1}(x), ..., f^{k+m-1}(x)$$

elemek különbözőek, valamint

$$f^{k+m}(x) = f^k(x) = f^l(y)$$

teljesül.

A 2.14. Definíció jelöléseit használva az (x, y) f-tiltott párra az $f^k(x)$ elem egy m periódusú ciklikus elem az $[x]_f = [y]_f$ f-komponensben. Könnyen igazolható, hogy $(x, y) \in A \times A$ akkor és csak akkor f-tiltott pár, ha

$$f^k(x) = f^l(y)$$

ciklikus elem és

$$f^{k+l}(x) \neq f^{k+l}(y)$$

teljesül valamely $k \geq 0$ és $l \geq 0$ egész számokra.

Az alábbi tulajdonságok a korábban megadott definíciók egyszerű következményei és bizonyításukkal együtt [20]-ban megtalálhatóak.

2.15. Állítás.
Legyen (A, f) unáris algebra és legyenek $x, y \in A$ tetszőleges elemek.

(1) Ha (x, y) f-tiltott pár, akkor (y, x) szintén f-tiltott pár.

(2) Ha (x, y) nem f-tiltott pár, akkor $(f(x), f(y))$ szintén nem f-tiltott pár.

(3) *Ha* $[x]_f \neq [y]_f$*, akkor* (x, y) *nem* f*-tiltott pár.*

(4) *Ha az* x *elem* f*-orbitja végtelen, akkor* $[x]_f$*-ben nincs ciklikus elem és így* (x, y) *nem* f*-tiltott pár (abban az esetben sem, ha* $[x]_f = [y]_f$*).*

2.16. Definíció.
Egy $y \in [x]_f$ *elem és egy rögzített* $c \in [x]_f$*,* $n = n(c)$ *periódusú ciklikus elem esetén van olyan* $t \geq 0$ *egész, amire*

$$f^t(y) = c.$$

Az y *és* c *közötti távolság legyen*

$$d(y, c) = \min\{t \mid t \geq 0 \text{ és } f^t(y) = c\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $f^t(y) = c$ akkor és csak akkor teljesül, ha $t \geq d(y, c)$ és $t - d(y, c)$ osztható n-nel, továbbá (x, y) akkor és csak akkor f-tiltott pár, ha $d(x, c) - d(y, c)$ nem osztható n-nel.

Az alábbi állítást is [20]-ban olvashatjuk.

2.17. Állítás.
Ha $(A, f, \leq_r)$ *részbenrendezett unáris algebra, akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

(1) *Ha* $c \in A$ *ciklikus elem és* $n(c) \geq 1$*, akkor a*

$$C = \{c, f(c), ..., f^{n(c)-1}(c)\}$$

teljes ciklus antilánc a $\leq_r$ *relációra nézve.*

(2) *Ha* $(x, y) \in A \times A$ f*-tiltott pár, akkor* x *és* y *összehasonlíthatatlan a* $\leq_r$ *reláció szerint.*

A bevezetett fogalmak szemléltetésére tekintsük az alábbi, [SZ4]-ben bemutatott példát.

2.18. Példa.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $f : A \to A$ egyváltozós művelet az A halmazon. Tekintsük az $x, y, z \in A$ elemeket a 2.1 Ábrának megfelelően. Az ábrán a nyilak az f függvény hatását mutatják. Látható, hogy

$$f^2(y) = f^4(x),$$

azaz $y \sim_f x$. Emiatt $[y]_f = [x]_f$. A x elem f-komponense 5 ciklikus elemet tartalmaz,

$$C_{[x]_f} = \{f^3(x), f^4(x), f^5(x), f^6(x), f^7(x)\} \subseteq [x]_f.$$

A $C_{[x]_f}$-beli ciklikus elemek különbözősége és az

$$f^8(x) = f^{3+5}(x) = f^3(x) = f^6(y)$$

egyenlőség fennállása miatt az (x, y) rendezett elempár f-tiltott pár, hiszen

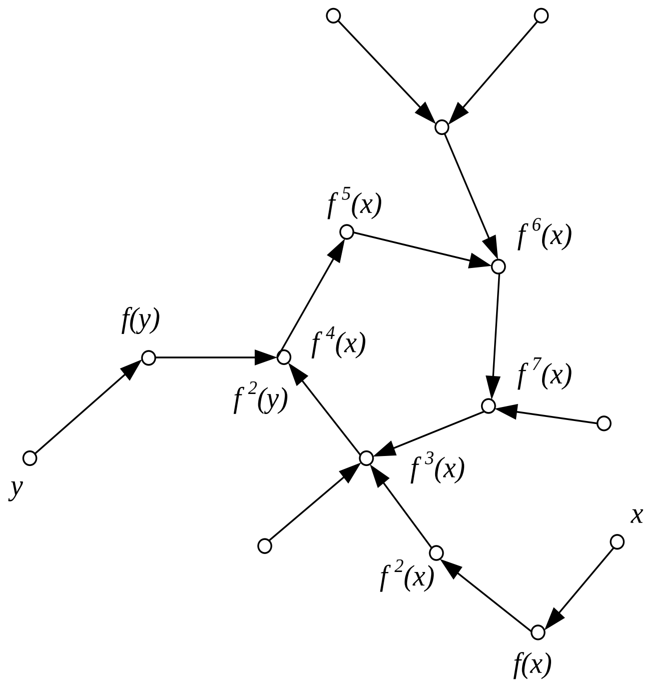
$$5 \nmid 6 - 3.$$

Ehhez az eredményhez annak a ténynek az észrevételével is eljuthatunk, hogy

$$f^2(y) = f^4(x)$$

ciklikus elem és

$$f^6(y) = f^{2+4}(y) \neq f^{2+4}(x) = f^6(x).$$



2.1. Ábra

Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén definiáljuk ([20] szerint) a $\lhd_r$ relációt az

$$A/_{\sim_f} = \{[x]_f \mid x \in A\}$$

faktorhalmazon a következőképpen:

$$[x]_f \lhd_r [y]_f \,,$$

ha $x_1 \leq_r y_1$ valamely $x_1 \in [x]_f$ és $y_1 \in [y]_f$ esetén.

2.19. Állítás. (lásd [20])
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra, akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

(1) $\lhd_r$ kvázirendezés (reflexív és tranzitív) az $\{[x]_f \mid x \in A\}$ faktorhalmazon.

(2) Ha $[x]_f \lhd_r [y]_f$ és $[y]_f \lhd_r [x]_f$ az $[x]_f \neq [y]_f$ f-komponensek esetén, akkor nincs ciklikus elem az $[x]_f \cup [y]_f$ halmazban.

A következő állítás [SZ8]-ból származik.

2.20. Állítás.
Legyen $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és $x, y \in A$, $y \in [x]_f$. Ha $c_1, c_2 \in [x]_f$ olyan ciklikus elemek, amelyekre (c_1, y) és (c_2, y) nem f-tiltott párok, akkor $c_1 = c_2$.

Bizonyítás:
Legyen $n = n(c_1) = n(c_2)$. Ekkor

$$d(c_1, c_1) - d(y, c_1) = -d(y, c_1)$$

és

$$d(c_2, c_1) - d(y, c_1)$$

osztható n-nel. Ebből az következik, hogy $d(c_2, c_1)$ is osztható n-nel, azaz $c_1 = c_2$. □

Az f-tiltott pár fogalmát felhasználva Földes és Szigeti bevezették kompatibilis részbenrendezés esetén az f-kvázilinearitás fogalmát ([20]).

2.21. Definíció.
Az R kompatibilis részbenrendezést az (A, f) unáris algebrán f-kvázilineárisnak nevezzük, ha $(x, y) \in R$ vagy $(y, x) \in R$ teljesül minden nem f-tiltott $(x, y) \in A \times A$ rendezett pár esetén.

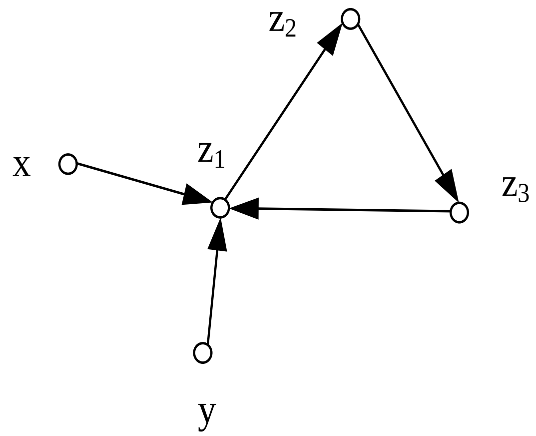
2.22. Példa.
Legyen $A = \{x, y, z_1, z_2, z_3\}$ és $f : A \to A$ egyváltozós művelet. A 2.2. Ábrán a nyilak az f függvény hatását mutatják. Az

$$R = \{(x, y), (x, z_3), (y, z_3)\} \cup \Delta_A$$

részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés az (A, f) unáris algebrán (Δ_A az identikus relációt jelöli az A halmazon). Az (x, y) rendezett elempár nem f-tiltott, mert $x \neq y$, de

$$f^t(x) = f^t(y)$$

teljesül minden $t \geq 1$ esetén. Hasonlóan látható, hogy (x, z_3) és (y, z_3) szintén nem f-tiltott párok. Továbbá bármely $(u, v) \notin R$ esetén az (u, v) pár f-tiltott ($u, v \in A$).



2.2. Ábra

3 Maximális kompatibilis kiterjesztések

E fejezet egyik célja, hogy megadjuk az r részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek, azaz maximális kompatibilis kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén. A másik célunk az, hogy általánosítsuk [49] eredményeit azokra az $(A, f, \leq_r)$ hármasokra, amelyekre az $f : A \to A$ függvény nem feltétlenül ciklusmentes.

A fejezet eredményei a szerző [SZ7] és [SZ8] cikkein alapulnak, amelyekből a [20], [48], és a [49] dolgozatok korábbi eredményeit speciális esetekként kaphatjuk meg.

3.1 Az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas

Legyen $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra. Definiáljuk az alábbi ekvivalenciarelációt az A halmazon:

$$\Phi = \{(x, y) \mid f^k(x) = y \text{ és } f^l(y) = x \text{ valamilyen } k, l \geq 0 \text{ egész számokra}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $x \in A$ esetén $[x]_\Phi \subseteq [x]_f$ teljesül az ekvivalencia osztályokra. Alkalmazzuk a továbbiakban az alábbi jelölést:

$$A^* = A/_\Phi = \{[x]_\Phi \mid x \in A\}.$$

Amennyiben $x \in A$ nem ciklikus elem, akkor $[x]_\Phi = \{x\}$. Ha $c \in A$ ciklikus elem, akkor a $[c]_\Phi = \{c, f(c), ..., f^{n(c)-1}(c)\}$ halmaz nem más, mint a c elem teljes ciklusa. Mivel $[c]_\Phi$ részalgebra (A, f)-ben, így rendelkezünk az $f^* : A^* \longrightarrow A^*$ indukált függvénnyel, amelyre

$$f^*([x]_\Phi) = [f(x)]_\Phi \,. \tag{3.1}$$

Világos, hogy egy $c \in A$ ciklikus elem esetén $f^*([c]_\Phi) = [c]_\Phi$, továbbá az is, hogy az f^* indukált függvénynek nincs valódi ciklusa. Tehát A^* megkapható, ha az A halmaz minden f-ciklusát hurokba húzzuk össze.

Definiáljuk a $\rho(r)$ reflexív bináris relációt az A^* halmazon a következőképpen:

$$\rho(r) = \{([x]_\Phi\,, [y]_\Phi) \in A^* \times A^* \mid x' \leq_r y' \text{ valamely } x' \in [x]_\Phi\,,\ y' \in [y]_\Phi \text{ esetén}\}.$$

3.1. Lemma.
A $\rho(r)$ reflexív bináris reláció $r^* = \overline{\rho(r)}$ tranzitív lezártja kompatibilis részbenrendezés az (A^*, f^*) unáris algebrán.

Bizonyítás:
Mivel $x' \in [x]_\Phi$ esetén $f(x') \in [f(x)]_\Phi$ teljesül, így azonnal megkapjuk $\rho(r)$ kompatibilitását. Emiatt r^* is kompatibilis (A^*, f^*)-on.

Az r^* antiszimmetriájának igazolásához tekintsünk egy valódi $\rho(r)$-ciklust:

$$[x_0]_\Phi\, \rho(r)\, [x_1]_\Phi\, \rho(r) ... \rho(r)\, [x_{k-1}]_\Phi\, \rho(r)\, [x_k]_\Phi = [x_0]_\Phi\,,$$

ahol $k \geq 2$ és $[x_0]_\Phi\,, [x_1]_\Phi\,, ..., [x_{k-1}]_\Phi$ különböző elemei az A^* halmaznak. Két esetet különböztetünk meg.

Ha az $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ halmazban nincs ciklikus elem, akkor

$$x_0 \leq_r x_1 \leq_r ... \leq_r x_{k-1} \leq_r x_k = x_0,$$

ami ellentmond annak, hogy $[x_0]_\Phi \neq [x_1]_\Phi$.

Ha van ciklikus elem az $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ halmazban, akkor megadhatjuk a $\rho(r)$-ciklus egy szegmensét

$$[x_i]_\Phi\, \rho(r)\, [x_{i+1}]_\Phi\, \rho(r) ... \rho(r)\, [x_{j-1}]_\Phi\, \rho(r)\, [x_j]_\Phi\,.$$

alakban, ahol x_i és x_j ciklikus elemek $(0 \leq i < j \leq k-1)$. Ha x_i az egyetlen ciklikus elem az $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ halmazban, akkor tekintsük a teljes

$$[x_i]_\Phi\, \rho(r)\, [x_{i+1}]_\Phi\, \rho(r) ... \rho(r)\, [x_{k-1}]_\Phi\, \rho(r)\, [x_0]_\Phi\, \rho(r)\, [x_1]_\Phi\, \rho(r) ... \rho(r)\, [x_{i-1}]_\Phi\, \rho(r)\, [x_i]_\Phi$$

szegmenst. Az $([x]_\Phi\,, [y]_\Phi) \in \rho(r) \Longrightarrow [x]_f \lhd_r [y]_f$ implikáció miatt mindkét fenti esetben

$$[x_0]_f \lhd_r [x_1]_f \lhd_r ... \lhd_r [x_{k-1}]_f \lhd_r [x_k]_f = [x_0]_f$$

adódik. Az x_i ciklikus elem jelenléte miatt kapjuk az

$$[x_0]_f = [x_1]_f = ... = [x_{k-1}]_f = [x_k]_f$$

egyenlőséget a 2.19. Állítás *(2)* része miatt. Ebből az első esetben az következik, hogy

$$[x_i]_\Phi = [x_j]_\Phi\,,$$

ami ellentmondás. Az egyetlen x_i ciklikus elem esetén

$$c' \leq_r x_{i+1} \leq_r ... \leq_r x_{k-1} \leq_r x_0 \leq_r x_1 \leq_r ... \leq_r x_{i-1} \leq_r c''$$

adódik valamilyen $c', c'' \in [x_i]_\Phi$ elemekkel. Az $[x_i]_\Phi$ ekvivalencia osztály elemei antiláncot képeznek, ezért $c' \leq_r c''$ miatt $c' = c''$ következik, ahonnan az $x_0 = x_1$ ellentmondást kapjuk. Így beláttuk, hogy r^* antiszimmetrikus. $\square$

3.2. Lemma.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra, továbbá $x, y \in A$ olyan elemek, hogy $[x]_\Phi \leq_{r^*} [y]_\Phi$, akkor léteznek olyan $0 \leq i, j$ egészek, amelyekre $x \leq_r f^i(y)$ és $f^j(x) \leq_r y$.

Bizonyítás:
Ha $([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in \rho(r)$, akkor $x' \leq_r y'$ valamely $x' \in [x]_\Phi$ és $y' \in [y]_\Phi$ elemekre. Legyenek $k, l, m, n \geq 0$ egész számok úgy, hogy $f^k(x') = x$, $f^l(x) = x'$ és $f^m(y') = y$, $f^n(y) = y'$. Ekkor

$$x = f^k(x') \leq_r f^k(y') = f^k(f^n(y)) = f^{k+n}(y)$$

és

$$f^{m+l}(x) = f^m(f^l(x)) = f^m(x') \leq_r f^m(y') = y$$

következik. Ha $[x]_\Phi \leq_{r^*} [y]_\Phi$, akkor egy

$$[z_0]_\Phi \, \rho(r) \, [z_1]_\Phi \, \rho(r) ... \rho(r) \, [z_{t-1}]_\Phi \, \rho(r) \, [z_t]_\Phi$$

A^*-beli sorozat írható fel, ahol $x = z_0$ és $z_t = y$. Emiatt találunk olyan $i_1, j_1, i_2, j_2, ..., i_t, j_t \geq 0$ egész számokat, amelyekre

$$z_{s-1} \leq_r f^{i_s}(z_s) \quad \text{és} \quad f^{j_s}(z_{s-1}) \leq_r z_s$$

minden $1 \leq s \leq t$ esetén. Következésképpen megállapíthatjuk, hogy

$$x = z_0 \leq_r f^{i_1}(z_1) \leq_r f^{i_1}(f^{i_2}(z_2)) \leq_r \ldots \leq_r f^{i_1}(f^{i_2}(\cdots f^{i_{t-1}}(z_{t-1}) \cdots)) \leq_r$$
$$\leq_r f^{i_1}(f^{i_2}(\cdots f^{i_{t-1}}(f^{i_t}(z_t)) \cdots)) = f^{i_1+i_2+\ldots+i_t}(y)$$

és

$$f^{j_1+j_2+\ldots+j_t}(x) = f^{j_t}(f^{j_{t-1}}(\cdots f^{j_2}(f^{j_1}(z_0)) \cdots)) \leq_r f^{j_t}(f^{j_{t-1}}(\cdots f^{j_2}(z_1) \cdots)) \leq_r$$
$$\ldots \leq_r f^{j_t}(f^{j_{t-1}}(z_{t-2})) \leq_r f^{j_t}(z_{t-1}) \leq_r z_t = y.$$

□

Az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármast az $(A, f, \leq_r)$ hármas összehúzott részbenrendezett unáris algebrájának nevezzük. Egy ciklusmentes f függvény esetén könnyen látható, hogy minden $[x]_\Phi$ $(x \in A)$ ekvivalencia osztály egy elemű halmaz, ezért $A^* = A$, $f^* = f$, $\rho(r) = r$ és $r^* = \overline{\rho(r)} = \overline{r} = r$. Így tehát a ciklusmentes esetben

$$(A^*, f^*, \leq_{r^*}) = (A, f, \leq_r).$$

Megjegyezzük, hogy az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas a [20] dolgozat 3.3 Lemmájának bizonyításában "lokálisan" definiált (E^*, f^*, r^*) részbenrendezett unáris algebra "globális" változata.

3.2 A maximális kompatibilis kiterjesztések jellemzése

Alkalmazzuk a részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris kiterjesztéseire az alábbi jelölést.

$$\mathcal{QL}(A, f, \leq_r) = \{R \mid r \subseteq R \subseteq A \times A, R \text{ kompatibilis } f\text{-kvázilineáris kiterjesztés}\}.$$

A 2. fejezetben már bevezettük az

$$\mathcal{L}(A, f, \leq_r) = \{R \mid r \subseteq R \subseteq A \times A \text{ és } R \text{ kompatibilis lineáris rendezés}\}$$

jelölést. Ekkor

$$\mathcal{L}(A, f, \leq_r) \subseteq \mathcal{QL}(A, f, \leq_r).$$

Ha az f függvénynek van valódi ciklusa, akkor

$$\mathcal{L}(A, f, \leq_r) = \varnothing$$

és ha az f függvénynek nincs valódi ciklusa, akkor

$$\mathcal{L}(A, f, \leq_r) = \mathcal{QL}(A, f, \leq_r).$$

Mivel az f^* függvény mindig ciklusmentes, a [48] cikk fő eredménye garantálja, hogy

$$\mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*}) \neq \varnothing.$$

Egy $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ kompatibilis lineáris kiterjesztésre értelmezzük az A halmazon az alábbi reflexív relációt:

$$\lambda(L) = \{(u, v) \in A \times A \mid ([u]_\Phi, [v]_\Phi) \in L \text{ és } (u, v) \text{ nem } f\text{-tiltott}\}.$$

A következő tétel teljes jellemzést biztosít az r részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris kiterjesztéseiről az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas r^* részbenrendezésének kompatibilis lineáris kiterjesztéseinek felhasználásával.

3.3. Tétel.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és R kompatibilis részbenrendezés kiterjesztése r-nek, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$.

(2) $R = \lambda(L)$ valamely $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ esetén.

Bizonyítás:

(2)$\Longrightarrow$(1). $\lambda(L)$ antiszimmetriája az alábbi implikáció következménye:

$$[u]_\Phi = [v]_\Phi \text{ és } (u,v) \text{ nem } f\text{-tiltott} \Longrightarrow u = v.$$

$\lambda(L)$ tranzitív tulajdonságának bizonyításához legyen $(u,v) \in \lambda(L)$ és $(v,w) \in \lambda(L)$. Ekkor $([u]_\Phi, [v]_\Phi) \in L$ és $([v]_\Phi, [w]_\Phi) \in L$ miatt következik, hogy $([u]_\Phi, [w]_\Phi) \in L$. Tegyük fel, hogy az (u,w) pár f-tiltott. Ekkor az $[u]_f = [w]_f$ f-komponens tartalmaz ciklikus elemet, melyet jelöljünk c-vel, és $\{f^t(u), f^t(w)\} \subseteq [c]_\Phi$ valamely $t \geq 0$ egész számra. L kompatibilitása az (A^*, f^*) páron biztosítja azt, hogy

$$[c]_\Phi = \left[f^t(u)\right]_\Phi \leq_L \left[f^t(v)\right]_\Phi \leq_L \left[f^t(w)\right]_\Phi = [c]_\Phi ,$$

ahonnan

$$\left[f^t(u)\right]_\Phi = \left[f^t(v)\right]_\Phi = \left[f^t(w)\right]_\Phi = [c]_\Phi$$

és

$$[u]_f = [v]_f = [w]_f = [c]_f$$

következik. Mivel (u,v) és (v,w) nem f-tiltott párok, ennélfogva

$$n(c) \mid d(u,c) - d(v,c) \qquad \text{és} \qquad n(c) \mid d(v,c) - d(w,c),$$

ahol $n(c)$ a c ciklikus elem periódusa és $d(x,c)$ jelöli az $x \in [c]_f$ elem távolságát a c ciklikus elemtől. Tehát

$$n(c) \mid d(u,c) - d(w,c),$$

ami ellentmondásban áll azzal, hogy az (u,w) pár f-tiltott. Következésképpen (u,w) nem f-tiltott és $(u,w) \in \lambda(L)$.

A $\lambda(L)$ kompatibilitása az (A,f) páron annak a következménye, hogy L kompatibilis az (A^*, f^*) páron valamint annak, hogy

$$(u,v) \text{ nem } f\text{-tiltott} \Longrightarrow (f(u), f(v)) \text{ nem } f\text{-tiltott}.$$

A leírtak egyenes következménye az, hogy $r \subseteq \lambda(L)$ és $\lambda(L)$ f-kvázilineáris.

(1)$\Longrightarrow$(2). Ha $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$, akkor $r \subseteq R$ miatt kapjuk, hogy $r^* \subseteq R^*$ és

$$\mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{R^*}) \subseteq \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*}).$$

Tekintsük az R^* egy $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{R^*})$ kompatibilis lineáris kiterjesztését. Azt állítjuk, hogy $R = \lambda(L)$.

Ha $(x, y) \in R$ akkor (x, y) nem f-tiltott a 2.17. Állítás *(2)* része miatt és

$$([x]_\Phi\,, [y]_\Phi) \in \rho(R) \subseteq R^* \subseteq L$$

alapján adódik, hogy $(x, y) \in \lambda(L)$.

Ha $(x, y) \in \lambda(L)$, akkor (x, y) nem f-tiltott és $(x, y) \notin R$ azt eredményezné, hogy $(y, x) \in R$. Így tehát az előbbiek szerint $(y, x) \in \lambda(L)$, ahonnan $\lambda(L)$ antiszimmetriája miatt az $x = y$ ellentmondáshoz jutunk. □

3.4. Definíció.
Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén a

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = \bigcap_{R \in \mathcal{QL}(A,f,\leq_r)} R \tag{3.2}$$

metszetet az r részbenrendezés lezártjának nevezzük az (A, f) párra nézve.

A $\mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$ halmaz sohasem üres [20] értelmében (ez a tény megkapható a 3.3. Tétel triviális következményeként is), így (3.2) monoton, idempotens és extenzív tulajdonságokkal rendelkező lezárási operátort eredményez az (A, f) unáris algebra kompatibilis részbenrendezéseinek halmazán.

3.5. Következmény.
Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebrára

$$\mathbf{cl}(A,f,\leq_r) = \{(x, y) \in A \times A \mid ([x]_\Phi\,, [y]_\Phi) \in \mathbf{cl}(A^*,f^*,\leq_{r^*}) \textit{ és } (x, y) \textit{ nem } f\textit{-tiltott}\}.$$

Bizonyítás:

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = \bigcap_{R \in \mathcal{QL}(A,f,\leq_r)} R = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(A^*,f^*,\leq_{r^*})} \lambda(L) =$$

$$= \left\{ (u, v) \in A \times A \mid ([u]_\Phi\,, [v]_\Phi) \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}(A^*,f^*,\leq_{r^*})} L \text{ és } (u, v) \text{ nem } f\text{-tiltott} \right\}$$

és $\mathcal{QL}(A^*,f^*,\leq_{r^*}) = \mathcal{L}(A^*,f^*,\leq_{r^*})$ miatt

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}(A^*,f^*,\leq_{r^*})} L = \mathbf{cl}(A^*, f^*, \leq_{r^*}).$$

□

A $\mathbf{cl}(A, f, \leq_r)$ leírásához a 3.5. Következmény miatt kizárólag a $\mathbf{cl}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ megadása szükséges.

3.3 $(A, f, \leq_r)$ NEVEZETES ELEMEI

Vezessük be az alábbi fogalmakat [48] megfelelő definíciói alapján (2.11. Definíció).

3.6. Definíció.
Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra $a \in A$ eleme

(1) $\uparrow$-definit, ha $f^p(a) <_r f^q(a)$ valamely $0 \leq p < q$ egész számokra,

(2) $\downarrow$-definit, ha $f^q(a) <_r f^p(a)$ valamely $0 \leq p < q$ egész számokra,

(3) indefinit, ha $f^p(a) \neq f^q(a)$ esetén $f^p(a)$ és $f^q(a)$ összehasonlíthatatlan az r relációra nézve minden $0 \leq p, q$ egész számra.

Könnyű észrevenni, hogy ciklusmentes f függvény esetén a fenti definíciók teljesen megegyeznek [48] megfelelő definícióival (2.11. Definíció). Nyilvánvaló, hogy minden $a \in A$ esetén fennáll a fenti definíció *(1)*, *(2)* és *(3)* esetének egyike. Ha a indefinit elem, akkor magától értetődik, hogy a nem lehet $\uparrow$-definit és nem lehet $\downarrow$-definit. A [48] dolgozat 1. Lemmájának alkalmazásával (2.9. Lemma) adódik (csekély mértékben megváltoztatva a bizonyítás első részét), hogy a nem lehet $\uparrow$-definit és $\downarrow$-definit elem egyszerre. Ezt a nemtriviális tényt megkaphatjuk az alábbi lemma közvetlen következményeként is.

3.7. Lemma.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és $a \in A$, akkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:

(1) Az a elem $\uparrow$-definit ($\downarrow$-definit) (indefinit) $(A, f, \leq_r)$-ban.

(2) $[a]_\Phi$ $\uparrow$-definit ($\downarrow$-definit) (indefinit) $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$-ban.

Bizonyítás:

(1)$\Longrightarrow$(2). Ha az a elem $\uparrow$-definit, akkor

$$f^p(a) <_r f^q(a)$$

valamely $0 \leq p < q$ egész számokra és

$$(f^*)^p([a]_\Phi) = [f^p(a)]_\Phi \leq_{r^*} [f^q(a)]_\Phi = (f^*)^q([a]_\Phi)$$

teljesül. Ha $[f^p(a)]_\Phi = [f^q(a)]_\Phi$ teljesülne, akkor $f^p(a)$ és $f^q(a)$ különböző, az r reláció szerint összehasonlítható elemek lennének az $[f^p(a)]_\Phi = [f^q(a)]_\Phi$

antiláncban, amely egy teljes ciklus. Tehát $[f^p(a)]_\Phi \neq [f^q(a)]_\Phi$. Azaz $[a]_\Phi$ $\uparrow$-definit elem $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$-ban.

Amennyiben a $\downarrow$-definit elem, akkor hasonló gondolatmenet alkalmazható.

Legyen a indefinit elem és tegyük fel, hogy $[a]_\Phi$ nem indefinit elem. Ekkor $[f^p(a)]_\Phi <_{r^*} [f^q(a)]_\Phi$ és $[f^p(a)]_\Phi \neq [f^q(a)]_\Phi$ valamely $0 \leq p, q$ egész számokra. A 3.2. Lemma miatt

$$f^p(a) \leq_r f^{i+q}(a) \qquad \text{és} \qquad f^{j+p}(a) \leq_r f^q(a)$$

teljesül valamely $0 \leq i, j$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$f^p(a) = f^{i+q}(a) \qquad \text{és} \qquad f^{j+p}(a) = f^q(a).$$

Ekkor

$$f^{i+q}(a) = f^i(f^q(a)) \qquad \text{és} \qquad f^q(a) = f^{j+p}(a) = f^j(f^{i+q}(a)).$$

Arra következtethetünk tehát, hogy

$$f^{i+q}(a) \in [f^p(a)]_\Phi \cap [f^q(a)]_\Phi = \varnothing,$$

ami ellentmondás. Így vagy $f^p(a) \neq f^{i+q}(a)$ vagy $f^{j+p}(a) \neq f^q(a)$ áll ellentmondásban az a elem indefinit tulajdonságával.

(2)⟹(1). Ha $[a]_\Phi$ $\uparrow$-definit elem, akkor a 3.6. Definíció *(1)* része alapján

$$(f^*)^p([a]_\Phi) <_{r^*} (f^*)^q([a]_\Phi)$$

teljesül valamely $0 \leq p < q$ egész számokra. Emiatt

$$[f^p(a)]_\Phi <_{r^*} [f^q(a)]_\Phi$$

és alkalmazva a 3.2. Lemmát azt kapjuk, hogy

$$f^p(a) \leq_r f^{q+i}(a)$$

valamely $0 \leq i$ esetén. Mivel $p < q$ és $f^q(a) = f^{q-p}(f^p(a))$, így

$$f^p(a) = f^{q+i}(a) = f^i(f^q(a))$$

azt eredményezné, hogy $f^q(a) \in [f^p(a)]_\Phi$, ami ellentmond annak, hogy $[f^p(a)]_\Phi \neq [f^q(a)]_\Phi$. Emiatt

$$f^p(a) <_r f^{q+i}(a)$$

és ezért a $\uparrow$-definit elem.

Ha $[a]_\Phi$ $\downarrow$-definit elem, akkor a $\uparrow$-definit esethez hasonló gondolatmenet alkalmazható a bizonyítás során.

Legyen $[a]_\Phi$ indefinit és tegyük fel, hogy a nem indefinit. Ekkor

$$f^p(a) \leq_r f^q(a) \tag{3.3}$$

valamely $0 \leq p, q$ egész számokra és $f^p(a) \neq f^q(a)$. Világos, hogy (3.3) következménye az, hogy

$$[f^p(a)]_\Phi \leq_{r^*} [f^q(a)]_\Phi \,.$$

Az $[f^p(a)]_\Phi = [f^q(a)]_\Phi$ egyenlőség azt eredményezné, hogy $f^p(a)$ és $f^q(a)$ különböző, az r reláció szerint összehasonlítható elemei az $[f^p(a)]_\Phi = [f^q(a)]_\Phi$ antiláncnak, amely egy teljes ciklus. Azaz $[f^p(a)]_\Phi \neq [f^q(a)]_\Phi$. Így

$$(f^*)^p([a]_\Phi) = [f^p(a)]_\Phi <_{r^*} [f^q(a)]_\Phi = (f^*)^q([a]_\Phi)$$

teljesül, amely ellentmond $[a]_\Phi$ indefinit tulajdonságának. Tehát a indefinit elem. $\square$

3.8. Következmény.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és $a \in A$, akkor a $\uparrow$-definit, $\downarrow$-definit és indefinit tulajdonságok közül az a elem pontosan egyet teljesít.

Bizonyítás:
A 2.9. Lemma biztosítja azt, hogy az $[a]_\Phi$ elem a ciklusmentes $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ részbenrendezett unáris algebrában a $\uparrow$-definit, $\downarrow$-definit és indefinit tulajdonságok közül pontosan egyet teljesít. $\square$

3.4 A metszet leírása

Definiáljuk az $M_\uparrow$, $M_\downarrow$ és M halmazokat úgy, mint [49]-ben.

3.9. Definíció.

$$M_\uparrow = \{(x,y) \in A \times A \mid x \uparrow \textit{-definit}, (\exists m)(\exists t) 0 \leq m \leq t, f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)\},$$

$$M_\downarrow = \{(x,y) \in A \times A \mid x \downarrow \textit{-definit}, (\exists m)(\exists t) 0 \leq t \leq m, f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)\},$$

$$M = \{(x,y) \in A \times A \mid x \textit{ indefinit}, (\exists m)(\exists t)(\exists m')(\exists t') 0 \leq m \leq t, 0 \leq t' \leq m',$$
$$f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x), f^{t'}(x) \leq_r f^{m'}(y) \neq f^{m'}(x)\}.$$

Készítsük el továbbá az alábbi halmazt:

$$P = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \text{ nem } f\text{-tiltott}\}.$$

Ha az f függvény ciklusmentes, akkor $P = A \times A$ és [49] fő eredményének értelmében

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

Így, felhasználva f^* ciklusmentességét, az alábbi egyenlőség írható fel:

$$\mathbf{cl}(A^*, f^*, \leq_{r^*}) = M_\uparrow^* \cup M_\downarrow^* \cup M^* \cup \{([x]_\Phi, [x]_\Phi) \mid x \in A\}. \tag{3.4}$$

A (3.4) eredményt felhasználva bizonyítjuk az alábbi tételt, amely részbenrendezett unáris algebra esetén teljes leírást ad az r részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetéről.

3.10. Tétel.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra, akkor

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = (M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P.$$

Bizonyítás:
Tekintsük az $(x, y) \in M_\uparrow \cap P$ elempárt. Ekkor a 3.6. Definíció és a 3.9. Definíció szerint

$$f^p(x) <_r f^q(x)$$

valamely $0 \leq p < q$ egész számokra és

$$f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)$$

valamely $0 \leq m \leq t$ egész számokra. Tegyük fel, hogy

$$(x, y) \notin \mathbf{cl}(A, f, \leq_r).$$

Ekkor $(x, y) \notin R$ valamely $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$ esetén és $(x, y) \in P$ miatt $(y, x) \in R$ adódik. Következésképpen

$$f^m(y) <_R f^m(x).$$

A 3.3. Tétel miatt van olyan $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ amire

$$R = \lambda(L) = \{(u, v) \in P \mid ([u]_\Phi, [v]_\Phi) \in L\}.$$

Azt állítjuk, hogy

$$[x]_\Phi \leq_L [f(x)]_\Phi\,. \tag{3.5}$$

Tegyük fel, hogy $[f(x)]_\Phi \leq_L [x]_\Phi$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$[f^q(x)]_\Phi \leq_L [f^p(x)]_\Phi$$

az f^* függvénynek az L relációra vonatkozó rendezéstartó tulajdonsága miatt. Mivel

$$f^p(x) \leq_r f^q(x)$$

közvetlen következménye az, hogy

$$[f^p(x)]_\Phi \leq_{r^*} [f^q(x)]_\Phi\,,$$

így

$$[f^p(x)]_\Phi \leq_L [f^q(x)]_\Phi\,,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$[f^p(x)]_\Phi = [f^q(x)]_\Phi\,.$$

Most azonban $f^p(x)$ és $f^q(x)$ különböző, az r reláció szerint összehasonlítható elemei az $[f^p(x)]_\Phi = [f^q(x)]_\Phi$ r relációra vonatkozó antiláncnak, így ellentmondásra jutottunk. Tehát

$$[f(x)]_\Phi \not\leq_L [x]_\Phi$$

és L linearitása miatt adódik (3.5). Felhasználva (3.5)-öt, az f^* függvénynek az L relációra vonatkozó rendezéstartó tulajdonságát, valamint azt, hogy $f^t(x) \leq_r f^m(y)$ kapjuk, hogy

$$[f^m(x)]_\Phi \leq_L \left[f^t(x)\right]_\Phi \leq_L [f^m(y)]_\Phi\,.$$

Másrészt, $f^m(y) <_R f^m(x)$ következménye az, hogy $[f^m(y)]_\Phi \leq_L [f^m(x)]_\Phi$, ahonnan $[f^m(x)]_\Phi = [f^m(y)]_\Phi$ következik. Mivel $f^m(y)$ és $f^m(x)$ különböző, az R-relációra nézve összehasonlítható elemek az $[f^m(x)]_\Phi = [f^m(y)]_\Phi$ teljes ciklusban, amely antilánc az R relációra, így ellentmondásra jutottunk. Következésképpen $(x, y) \in \mathbf{cl}(A, f, \leq_r)$, azaz

$$M_\uparrow \cap P \subseteq \mathbf{cl}(A, f, \leq_r). \tag{3.6}$$

Hasonló érveléssel bizonyítható, hogy

$$M_\downarrow \cap P \subseteq \mathbf{cl}(A, f, \leq_r). \tag{3.7}$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy

$$M \cap P \subseteq \mathbf{cl}(A, f, \leq_r). \tag{3.8}$$

Legyen $(x, y) \in M \cap P$. Ekkor $f^p(x)$ és $f^q(x)$ összehasonlíthatatlan elemek az r relációra nézve minden olyan $0 \leq p, q$ egész számra, ahol $f^p(x) \neq f^q(x)$, továbbá

$$f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x), \quad f^{t'}(x) \leq_r f^{m'}(y) \neq f^{m'}(x)$$

teljesül valamely $0 \leq m \leq t$ és $0 \leq t' \leq m'$ egész számok esetén. Tegyük fel, hogy

$$(x, y) \notin \mathbf{cl}(A, f, \leq_r).$$

Ekkor $(x, y) \notin R$ valamely $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$ esetén és $(x, y) \in P$ azt eredményezi, hogy $(y, x) \in R$. Tehát

$$f^m(y) <_R f^m(x) \qquad \text{és} \qquad f^{m'}(y) <_R f^{m'}(x).$$

A 3.3. Tétel miatt

$$R = \lambda(L) = \{(u, v) \in P \mid ([u]_\Phi, [v]_\Phi) \in L\}$$

valamely $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ esetén. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\left[f^t(x)\right]_\Phi \leq_L [f^m(y)]_\Phi \leq_L [f^m(x)]_\Phi \text{ és } [f^{t'}(x)]_\Phi \leq_L [f^{m'}(y)]_\Phi \leq_L [f^{m'}(x)]_\Phi.$$

Az L linearitása miatt vagy $[x]_\Phi \leq_L [f(x)]_\Phi$ vagy $[f(x)]_\Phi \leq_L [x]_\Phi$ teljesül.

Ha $[x]_\Phi \leq_L [f(x)]_\Phi$, akkor az f^* függvénynek az L-re vonatkozó rendezéstartó tulajdonsága miatt

$$[f^m(x)]_\Phi \leq_L \left[f^t(x)\right]_\Phi$$

következik, ahonnan

$$\left[f^t(x)\right]_\Phi = [f^m(y)]_\Phi = [f^m(x)]_\Phi$$

adódik. Most $f^m(y)$ és $f^m(x)$ különböző, az R reláció szerint összehasonlítható elemei az $[f^m(x)]_\Phi = [f^m(y)]_\Phi$ teljes ciklusnak, amely antilánc az R-re nézve, így ellentmondásra jutottunk.

Ha $[f(x)]_\Phi \leq_L [x]_\Phi$, akkor f^* L-re vonatkozó rendezéstartó tulajdonsága miatt

$$[f^{m'}(x)]_\Phi \leq_L [f^{t'}(x)]_\Phi,$$

ahonnan

$$[f^{t'}(x)]_\Phi = [f^{m'}(y)]_\Phi = [f^{m'}(x)]_\Phi$$

következik. Mivel $f^{m'}(y)$ és $f^{m'}(x)$ különböző, az R reláció szerint összehasonlítható elemei az $[f^{m'}(x)]_\Phi = [f^{m'}(y)]_\Phi$ teljes ciklusnak, amely antilánc r-re nézve, így ismét ellentmondásra jutottunk, azaz (3.8) teljesül.

A bizonyítás második részében az alábbi tartalmazást fogjuk igazolni:

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) \subseteq (M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P.$$

Egy $(x, y) \in \mathbf{cl}(A, f, \leq_r)$ esetén a 3.5. Következmény azt adja, hogy

$$([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in \mathbf{cl}(A^*, f^*, \leq_{r^*}) = M_\uparrow^* \cup M_\downarrow^* \cup M^* \cup \{([x]_\Phi, [x]_\Phi) \mid x \in A\}$$

valamint azt, hogy $(x, y) \in P$. Az alábbi eseteket kell megvizsgálnunk.

1. eset: Ha $([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in M_\uparrow^*$, akkor $[x]_\Phi$ $\uparrow$-definit elem és

$$(f^*)^t([x]_\Phi) \leq_{r^*} (f^*)^m([y]_\Phi) \neq (f^*)^m([x]_\Phi)$$

azaz

$$\left[f^t(x)\right]_\Phi \leq_{r^*} [f^m(y)]_\Phi \neq [f^m(x)]_\Phi$$

következik valamely $0 \leq m \leq t$ egész számokra. A 3.7. Lemma alapján ekkor x is $\uparrow$-definit. A 3.2. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y)$$

valamely $0 \leq j$ egész számra. Így tehát $m \leq j + t$ és

$$f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)$$

miatt $(x, y) \in M_\uparrow$ következik.

2. eset: Ha $([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in M_\downarrow^*$, akkor $[x]_\Phi$ $\downarrow$-definit elem és

$$(f^*)^t([x]_\Phi) \leq_{r^*} (f^*)^m([y]_\Phi) \neq (f^*)^m([x]_\Phi)$$

azaz

$$[f^t(x)]_\Phi \leq_{r^*} [f^m(y)]_\Phi \neq [f^m(x)]_\Phi$$

teljesül valamely $0 \leq t \leq m$ egész számokra. A 3.7. Lemma miatt x is $\downarrow$-definit elem. Alkalmazva a 3.2. Lemmát azt kapjuk, hogy

$$f^t(x) \leq_r f^{i+m}(y) \qquad \text{és} \qquad f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y)$$

valamely $0 \leq i, j$ egész számokra.

Ha

$$f^{i+m}(y) \neq f^{i+m}(x),$$

akkor $t \leq i + m$ és $f^t(x) \leq_r f^{i+m}(y) \neq f^{i+m}(x)$ miatt $(x, y) \in M_\downarrow$ adódik.

Tegyük fel, hogy

$$f^{i+m}(y) = f^{i+m}(x),$$

ekkor $i \geq 1$ mivel $f^m(y) \neq f^m(x)$. Ha most az $f^t(x) \leq_r f^{i+m}(y)$ egyenlőtlenségnél erősebb

$$f^t(x) <_r f^{i+m}(y) = f^{i+m}(x)$$

feltétel teljesülne, akkor $t < i + m$ alapján az következne, hogy x $\uparrow$-definit elem, ami ellentmondás. Ezért

$$f^t(x) = f^{i+m}(y) = f^{i+m}(x).$$

Azaz $f^m(y) \in [f^t(x)]_f$ és $f^t(x)$ ciklikus elem. A $t \leq m$ és $t \leq j + t$ egyenlőtlenségek miatt az $f^m(x)$ és az $f^{j+t}(x)$ elemek szintén ciklikus elemek $[f^t(x)]_f$-ben. Az $(f^m(x), f^m(y)) \in P$ tartalmazás annak a következménye, hogy $(x, y) \in P$ és $f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y)$ miatt $(f^{j+t}(x), f^m(y)) \in P$ is teljesül, így a 2.20. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$f^{j+t}(x) = f^m(x).$$

Most $(x, y) \in M_\downarrow$ annak a következménye, hogy

$$f^m(x) = f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x).$$

3. eset: Ha $([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in M^*$, akkor $[x]_\Phi$ indefinit elem és

$$(f^*)^t([x]_\Phi) \leq_{r^*} (f^*)^m([y]_\Phi) \neq (f^*)^m([x]_\Phi),$$

valamint

$$(f^*)^{t'}([x]_\Phi) \leq_{r^*} (f^*)^{m'}([y]_\Phi) \neq (f^*)^{m'}([x]_\Phi),$$

azaz

$$\left[f^t(x)\right]_\Phi \leq_{r^*} [f^m(y)]_\Phi \neq [f^m(x)]_\Phi \text{ és } [f^{t'}(x)]_\Phi \leq_{r^*} [f^{m'}(y)]_\Phi \neq [f^{m'}(x)]_\Phi$$

adódik valamely $0 \leq m \leq t$ és $0 \leq t' \leq m'$ egész számokra. A 3.7. Lemma miatt x indefinit elem. A 3.2. Lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y)$$

és

$$f^{t'}(x) \leq_r f^{i'+m'}(y), \quad f^{j'+t'}(x) \leq_r f^{m'}(y)$$

valamilyen $0 \leq j, i', j'$ egész számok esetén. Tehát

$$m \leq j + t, \qquad f^{j+t}(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)$$

és
$$t' \leq i' + m', \qquad f^{t'}(x) \leq_r f^{i'+m'}(y).$$
Ha $f^{i'+m'}(y) \neq f^{i'+m'}(x)$, akkor $(x, y) \in M$.

Tegyük fel, hogy $f^{i'+m'}(y) = f^{i'+m'}(x)$. Ekkor $i' \geq 1$, mert $f^{m'}(y) \neq f^{m'}(x)$. Most
$$f^{t'}(x) \neq f^{i'+m'}(x)$$
és
$$f^{t'}(x) \leq_r f^{i'+m'}(y) = f^{i'+m'}(x)$$
azt eredményezné, hogy x nem indefinit elem, ami ellentmondás.

Emiatt
$$f^{t'}(x) = f^{i'+m'}(y) = f^{i'+m'}(x)$$
és $t' < i' + m'$. Tehát $f^{m'}(y) \in [f^{t'}(x)]_f$ és $f^{t'}(x)$ ciklikus elem. Mivel $t' \leq m'$ és $t' \leq j' + t'$, ezért az $f^{m'}(x)$ és $f^{j'+t'}(x)$ ugyancsak ciklikus elemek $[f^{t'}(x)]_f$-ben. Most $(f^{m'}(x), f^{m'}(y)) \in P$ abból következik, hogy $(x, y) \in P$ és $(f^{j'+t'}(x), f^{m'}(y)) \in P$ abból adódik, hogy $f^{j'+t'}(x) \leq_r f^{m'}(y)$. A 2.20. Állítást felhasználva kapjuk, hogy
$$f^{j'+t'}(x) = f^{m'}(x).$$
Tehát $(x, y) \in M$ most annak a következménye, hogy
$$f^{m'}(x) = f^{j'+t'}(x) \leq_r f^{m'}(y) \neq f^{m'}(x).$$

4. eset: Ha $([x]_\Phi, [y]_\Phi) \in \{([x]_\Phi, [x]_\Phi) \mid x \in A\}$, akkor $[x]_\Phi = [y]_\Phi$ és $(x, y) \in P$ miatt $x = y$ adódik. □

Ha $f : A \to A$ r-szerint antimonoton, akkor nyilvánvaló, hogy
$$f^2 = f \circ f$$
r-szerint monoton lesz.

A fentiek alapján megfogalmazhatjuk az alábbi következményt részbenrendezés antimonotonitást őrző lineáris kiterjesztéseinek metszetéről.

3.11. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és $f : A \to A$ r-szerint antimonoton függvény. Ekkor
$$\mathbf{cl}(A, f^2, \leq_r) \subseteq \bigcap \{\lambda \mid r \subseteq \lambda \text{ lineáris rendezés és } f\ \lambda\text{-antimonoton.}\}$$

4 ALKALMAZÁSOK

Jelen fejezetben két alkalmazást mutatunk be. Az első példánkban ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra esetén adunk meg egy speciális kompatibilis részbenrendezést, amelynek lezártját is meghatározzuk. A 4.1. alfejezet eredményei az [SZ10] cikkben olvashatóak.

Második példánkban nem követeljük meg az f függvény ciklusmentességét, így a megadott részbenrendezés esetén a lezárt néhány elemének meghatározásához felhasználjuk a metszet pontos leírását kimondó 3.10. Tételt, amely a bemutatott példával együtt az [SZ8] cikkben olvasható. A 3.10. Tétel algoritmizálhatóságára alapozva a metszet valamennyi elemének meghatározására számítógépes programot készítettünk a Maple programcsomag segítségével. A kapott eredményeket az [SZ9] dolgozat tartalmazza.

4.1 AZ ACIKLIKUS $(A, f, \hat{f})$ RÉSZBENRENDEZETT UNÁRIS ALGEBRA

Ha az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén az $f : A \to A$ függvény ciklusmentes, akkor az

$$r_f = \mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = \bigcap_{R \in \mathcal{QL}(A,f,\leq_r)} R = \bigcap_{R \in \mathcal{L}(A,f,\leq_r)} R$$

reláció, amely az r részbenrendezés lezártja, kompatibilis részbenrendezése (A, f)-nek. Amennyiben $r_f = r$, akkor azt mondjuk, hogy az r reláció *hűen reprezentálható*. Ekkor az (A, f, r) unáris algebrát hűen reprezentáltnak nevezzük.

Az (A, f) unáris algebrának a $H \subseteq A$ részhalmaz által generált részalgebráját jelölje $\langle H \rangle_f$. Ha $H = \{x\}$, akkor $\langle \{x\} \rangle_f$ helyett $\langle x \rangle_f$-et írunk. Megjegyezzük, hogy az $x \in A$ elem által generált részalgebra nem más, mint az x elem f-orbitja:

$$\langle x \rangle_f = \{x, f(x), f^2(x), ...\}.$$

Könnyen látható, hogy

$$\langle H \rangle_f = \bigcup_{x \in H} \langle x \rangle_f.$$

Definiáljuk az $\hat{f} \subseteq A \times A$ relációt a következőképpen:

$$x \hat{f} y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x \rangle_f \subseteq \langle y \rangle_f.$$

Világos, hogy $\langle x \rangle_f \subseteq \langle y \rangle_f$ pontosan akkor teljesül, ha $x \in \langle y \rangle_f$, azaz ha $x = f^k(y)$ valamilyen $k \geq 0$ egészre.

4.1. Állítás.
Az (A, f) unáris algebrára a következő kijelentések ekvivalensek:

(1) f ciklusmentes.

(2) $\hat{f}$ antiszimmetrikus.

Bizonyítás:

(1)⇒(2). Tegyük fel, hogy az $x, y \in A$ elemekre $x\hat{f}y$ és $y\hat{f}x$. Ekkor $\langle x\rangle_f = \langle y\rangle_f$, ahonnan $x = f^m(y)$ és $y = f^n(x)$ következik ($m \geq 0$ és $n \geq 0$ egész számok). Így

$$x = f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x),$$

ahonnan f ciklusmentessége miatt

$$x = f(x) = ... = f^n(x) = ... = f^{n+m}(x)$$

következik. Tehát

$$x = f^n(x) = y.$$

(2)⇒(1). Tegyük fel, hogy a $0 \leq m < n$ egészekre $f^m(x) = f^n(x)$. Ekkor

$$\langle f^{m+1}(x)\rangle_f = \langle f^m(x)\rangle_f,$$

hiszen $\langle f^{m+1}(x)\rangle_f \subseteq \langle f^m(x)\rangle_f$ nyilvánvalóan teljesül és

$$f^m(x) = f^{n-m-1}(f^{m+1}(x))$$

miatt $\langle f^m(x)\rangle_f \subseteq \langle f^{m+1}(x)\rangle_f$ is teljesül. Így

$$f^m(x)\hat{f}f^{m+1}(x) \qquad \text{és} \qquad f^{m+1}(x)\hat{f}f^m(x),$$

ahonnan az $\hat{f}$ antiszimmetriájából $f^m(x) = f^{m+1}(x)$ következik. Tehát

$$f^m(x) = f^{m+1}(x) = ... = f^n(x)$$

is rögtön adódik. □

4.2. Állítás.
Az (A, f) ciklusmentes unáris algebrának $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezése.

Bizonyítás:
$\hat{f}$ mindig reflexív és tranzitív, a ciklusmentes esetben pedig a 4.1. Állítás szerint még antiszimmetrikus is. Ha az $x, y \in A$ elemekre $x\hat{f}y$, akkor

$$\langle x\rangle_f \subseteq \langle y\rangle_f$$

miatt $x = f^m(y)$ valamely $m \geq 0$ egész számra. Így $f(x) = f^m(f(y))$ adódik, ahonnan

$$\langle f(x)\rangle_f \subseteq \langle f(y)\rangle_f,$$

azaz

$$f(x)\hat{f}f(y)$$

következik. □

Az $(\hat{f})_f$ lezárt meghatározásához további állítások és definíciók szükségesek.

4.3. Állítás.
Tegyük fel, hogy az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $x, y \in A$ elemeire $\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f \neq \varnothing$. Ekkor pontosan egy olyan $z \in A$ elem létezik, amelyre

$$\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f = \langle z\rangle_f$$

teljesül. Ezt az elemet az x és y elemek f-metszetének nevezzük, jelölésére az $x \triangle y$- t használjuk.

Bizonyítás:
$\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f \neq \varnothing$ miatt értelmes az

$$n = \min\{k \geq 0 \mid f^k(x) \in \langle y\rangle_f\}$$

definíció. Azt állítjuk, hogy a $z = f^n(x)$ elemre

$$\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f = \langle z\rangle_f$$

teljesül. A

$$\langle z\rangle_f \subseteq \langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f$$

tartalmazás nyilvánvaló, másrészt $u \in \langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f$ esetén $u = f^k(x) \in \langle y\rangle_f$ valamilyen $k \geq 0$ egészre. Így $k \geq n$ és $u = f^{k-n}(f^n(x)) = f^{k-n}(z) \in \langle z\rangle_f$. Az, hogy pontosan egy olyan $z \in A$ elem van, amelyre

$$\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f = \langle z\rangle_f$$

a 4.1. Állítás következménye. □

4.4. Definíció.
Ha az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $x, y \in A$ elemeire $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \varnothing$, akkor legyen az x és y elemek f-távolsága:

$$\delta(x, y) = |(\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f) \cup (\langle y \rangle_f \setminus \langle x \rangle_f)| = |\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f| + |\langle y \rangle_f \setminus \langle x \rangle_f|.$$

4.5. Megjegyzés.
A 2.16. Definícióban már szerepelt egy távolság fogalom, amely ciklikus elemhez kapcsolódott. A 4.4. Definícióbeli távolságot ciklikus elemet nem tartalmazó (A, f) pár esetén értelmeztük és nem keverendő össze a korábbi fogalommal.

A 4.3. Állítás miatt az x és y elemek f-távolsága $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \varnothing$ esetén:

$$\delta(x, y) = |\langle x \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f| + |\langle y \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f|,$$

mert

$$\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f = \langle x \rangle_f \setminus (\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f) = \langle x \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f$$

és hasonlóan

$$\langle y \rangle_f \setminus \langle x \rangle_f = \langle y \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f.$$

4.6. Állítás.
Ha az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $x, y \in A$ elemeire $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \varnothing$, akkor

$$|\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f| = |\langle x \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f| = \min\{k \geq 0 \mid f^k(x) \in \langle y \rangle_f\} \leq N(x),$$

ahol $N(x)$ a 2.7. Definícióval megadott lépésszám.

Bizonyítás:
Legyen $n = \min\{k \geq 0 \mid f^k(x) \in \langle y \rangle_f\}$. Ekkor a 4.3. Állítás bizonyításából tudjuk, hogy $x \triangle y = f^n(x)$. Két esetet különböztetünk meg.

(1) Ha $N(x) = \infty$, akkor $n < N(x)$ és

$$|\langle x \rangle_f \setminus \langle f^n(x) \rangle_f| = |\{f^k(x) | k \geq 0\} \setminus \{f^k(x) | k \geq n\}|,$$

azaz

$$|\langle x \rangle_f \setminus \langle f^n(x) \rangle_f| = |\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}| = n.$$

(2) Ha $N = N(x) < \infty$, akkor $N < n$ esetén

$$\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f = \{x, f(x), ..., f^N(x)\} \cap \langle y \rangle_f = \varnothing$$

adódna, ami ellentmond a feltételezésünknek. Tehát $n \leq N$ és

$$|\langle x\rangle_f \setminus \langle f^n(x)\rangle_f| = |\{x, f(x), ..., f^N(x)\} \setminus \{f^n(x), ..., f^N(x)\}|,$$

azaz

$$|\langle x\rangle_f \setminus \langle f^n(x)\rangle_f| = |\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}| = n.$$

□

Könnyen látható, hogy $\langle x \triangle y\rangle_f \setminus \langle x\rangle_f = \varnothing$ miatt a 4.6. Állításban

$$|\langle x\rangle_f \setminus \langle y\rangle_f| = |\langle x\rangle_f \setminus \langle x \triangle y\rangle_f| = \delta(x, x \triangle y).$$

Az alábbi tétel az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $\hat{f}$ részbenrendezésének lezártját írja le.

4.7. Tétel.
Az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezésének az $(\hat{f})_f$ lezártjára és az $x, y \in A$ elemekre teljesül, hogy:

$$(x, y) \in (\hat{f})_f \;\Leftrightarrow\; \textit{ha } x = y, \textit{ vagy } \langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f \neq \varnothing \textit{ és } \delta(x, x \triangle y) < \delta(y, x \triangle y).$$

Bizonyítás:
Mivel az $(A, f, \hat{f})$ ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra minden $x \in A$ elemére $\langle f(x)\rangle_f \subseteq \langle x\rangle_f$, azaz $(f(x), x) \in \hat{f}$, azért a 2.10. Lemmából könnyen kaphatjuk az

$$(\hat{f})_f = \{(x, y) | (\exists m) 0 \leq m, f^m(x) \hat{f} f^m(y), f^m(x) \neq f^m(y)\} \cup \{(x, x) | x \in A\}$$

előállítást. Így $(x, y) \in (\hat{f})_f$ esetén $x = y$, vagy $\langle f^m(x)\rangle_f \subseteq \langle f^m(y)\rangle_f$ és $f^m(x) \neq f^m(y)$ teljesül valamilyen $m \geq 0$ egészre. Tegyük fel, hogy

$$k = \delta(x, x \triangle y) \geq \delta(y, x \triangle y) = l.$$

Ekkor $f^m(x) \in \langle y\rangle_f$ miatt a 4.6. Állításból $m \geq k$ következik. Az

$$f^m(x) = f^{m-k}(f^k(x)) = f^{m-k}(x \triangle y)$$

és

$$f^m(y) = f^{m-l}(f^l(y)) = f^{m-l}(x \triangle y)$$

egyenlőségek miatt

$$f^m(y) = f^{k-l}(f^m(x)),$$

ahonnan $\langle f^m(y)\rangle_f \subseteq \langle f^m(x)\rangle_f$ adódik. Az $\hat{f}$ reláció antiszimmetrikus tulajdonságából az $f^m(x) = f^m(y)$ ellentmondáshoz jutunk.

Ha most $\langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f \neq \varnothing$ és

$$m = d(x, x\triangle y) < d(y, x\triangle y) = l,$$

akkor

$$f^m(x) = x\triangle y = f^l(y) = f^{l-m}(f^m(y))$$

szerint $\langle f^m(x)\rangle_f \subseteq \langle f^m(y)\rangle_f$. Másrészt a 4.6. Állításból $m < l \leq N(y)$ adódik, ahonnan

$$f^m(y) \neq f^l(y) = f^m(x)$$

következik. Tehát az $(\hat{f})_f$ előállítása szerint $(x, y) \in (\hat{f})_f$ (az $x = y$ esetben ez nyilvánvaló.) $\square$

4.2 Egy konkrét ciklikus $(A, f, \leq_d)$ részbenrendezett unáris algebra

Legyen

$$2 \leq p_1 < p_2 < p_3 < q_1 < q_2 < q_3 < q_4 < r$$

prímszámok egy sorozata és tekintsük az egész számok halmazának az alábbi, megszámlálhatóan végtelen számosságú részhalmazát:

$$\begin{aligned} A = \quad & \{p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k \mid m_i \geq 0, n_j \geq 0, i \in \{1,2,3\}, \\ & j \in \{1,2,3,4\}, k \geq 0\}. \end{aligned}$$

Az A halmaznak egy természetes részbenrendezése az oszthatósági reláció. Amennyiben $x, y \in A$, akkor alkalmazzuk az $x \leq_d y$ jelölést, ha $x \mid y$. Definiáljuk az $f : A \to A$ függvényt az $x = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k$ elemen a következőképpen:

$$f(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) = p_1^{m_3} p_2^{m_1} p_3^{m_2} q_1^{n_1+n_2} q_2^{n_3} q_3^{n_4} r^{\langle k-1 \rangle},$$

ahol $\langle l \rangle = l$, ha $l \geq 0$ és $\langle l \rangle = 0$, ha $l < 0$. Megjegyezzük, hogy $\langle \langle l \rangle - 1 \rangle = \langle l - 1 \rangle$. Világos, hogy $x \leq_d y$ esetén $f(x) \leq_d f(y)$ is teljesül, azaz $\leq_d$ kompatibilis részbenrendezés, tehát $(A, f, \leq_d)$ részbenrendezett unáris algebra. Tekintsük az alábbi iteráltakat:

$$f^2(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) = p_1^{m_2} p_2^{m_3} p_3^{m_1} q_1^{n_1+n_2+n_3} q_2^{n_4} r^{\langle k-2 \rangle},$$

$$\begin{aligned} f^3(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) &= p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1+n_2+n_3+n_4} r^{\langle k-3 \rangle}, \\ f^4(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) &= p_1^{m_3} p_2^{m_1} p_3^{m_2} q_1^{n_1+n_2+n_3+n_4} r^{\langle k-4 \rangle}, \\ f^5(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) &= p_1^{m_2} p_2^{m_3} p_3^{m_1} q_1^{n_1+n_2+n_3+n_4} r^{\langle k-5 \rangle}, \\ f^6(p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4} r^k) &= p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} q_1^{n_1+n_2+n_3+n_4} r^{\langle k-6 \rangle}. \end{aligned}$$

A fent leírtakból következik, hogy bármely $x \in A$ esetén

$$f^6(x) \leq_d f^3(x) \qquad \text{és} \qquad f^{\langle k-3 \rangle + 6}(x) = f^{\langle k-3 \rangle + 3}(x)$$

teljesül. Emiatt, ha $f^6(x) \neq f^3(x)$, akkor az x elem $\downarrow$-definit tulajdonságú. Nyilvánvaló, hogy

$$f^6(x) = f^3(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq k \leq 3.$$

Bármely $x \in A$ és $i \in \{1, 2, 4, 5\}$ esetén az alábbi ekvivalenciák a fenti számolások egyszerű következményei.

(1) $x \leq_d f^i(x) \Longleftrightarrow m_1 = m_2 = m_3, n_2 = n_3 = n_4 = k = 0$ és $x = f(x)$,

(2) $x \leq_d f^3(x) \Longleftrightarrow n_2 = n_3 = n_4 = k = 0$ és $x = f^3(x)$,

(3) $f^i(x) \leq_d x \Longleftrightarrow m_1 = m_2 = m_3,\ n_2 = n_3 = n_4 = 0$ és $x = f(x)r^{k-\langle k-1\rangle}$,

(4) $f^3(x) \leq_d x \Longleftrightarrow n_2 = n_3 = n_4 = 0$ és $x = f^3(x)r^{k-\langle k-3\rangle}$.

4.8. Állítás.
Az $(A, f, \leq_d)$ részbenrendezett unáris algebra esetén $M_\uparrow = \varnothing$.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $z \in A$ egy $\uparrow$-definit elem. Ekkor

$$f^6(z) = f^3(z) \qquad \text{és} \qquad f^i(z) <_d f^j(z)$$

teljesül valamely $0 \leq i < j$ egészekre. Alkalmazva az $f^6(z) = f^3(z)$ egyenlőséget megállapíthatjuk, hogy

$$f^i(z) <_d f^j(z) = f^{j'}(z)$$

valamely $0 \leq i < j' \leq j$ egészekre, ahol $1 \leq j' - i \leq 5$. Ekkor

$$x = f^i(z) <_d f^{j'}(z) = f^{j'-i}(x)$$

ellentmond (1)-nek és (2)-nek is. Tehát nincs $\uparrow$-definit elem, azaz

$$M_\uparrow = \varnothing.$$

□

Legyen $x \in A$ indefinit elem. Ekkor $f^6(x) = f^3(x)$, $0 \leq k \leq 3$ és $f^i(x)$ és $f^j(x)$ összehasonlíthatatlan elemek minden $0 \leq i, j$ esetén, ahol $f^i(x) \neq f^j(x)$. Amiatt, hogy $f^6(x) = f^3(x)$, az x elem indefinit tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy az

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), f^5(x)\}$$

halmaz antilánc. Mivel $f^i(x) <_d f^j(x)$ nem következhet be $0 \leq i < j \leq 5$ esetén, így csak az $f^j(x) <_d f^i(x)$, $0 \leq i < j \leq 5$ eseteket kell tekinteni. Alkalmazva a (3)-as és (4)-es ekvivalenciákat az alábbi $\binom{6}{2} = 15$ esetet vizsgáljuk.

1. Ha $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, akkor

$$f^i(x) <_d x \Longleftrightarrow m_1 = m_2 = m_3,\ n_2 = n_3 = n_4 = 0 \text{ és } 1 \leq k \leq 3.$$

2. $f^3(x) <_d x \iff n_2 = n_3 = n_4 = 0$ és $1 \leq k \leq 3$.
3. Ha $i \in \{1, 2, 4\}$, akkor
$$f^{1+i}(x) <_d f(x) \iff m_1 = m_2 = m_3,\ n_3 = n_4 = 0 \text{ és } 2 \leq k \leq 3.$$
4. $f^4(x) <_d f(x) \iff n_3 = n_4 = 0$ és $2 \leq k \leq 3$.
5. Ha $i \in \{1, 2\}$, akkor
$$f^{2+i}(x) <_d f^2(x) \iff m_1 = m_2 = m_3,\ n_4 = 0 \text{ és } k = 3.$$
6. $f^5(x) <_d f^2(x) \iff n_4 = 0$ és $k = 3$.
7. Ha $i \in \{1, 2\}$, akkor $f^{3+i}(x) <_d f^3(x)$ lehetetlen.
8. $f^5(x) <_d f^4(x)$ lehetetlen.

Tehát x akkor és csak akkor indefinit elem, ha teljesül az alábbi feltételek egyike:

(a) $k = 0$,

(b) $k = 1$ és $\{n_2, n_3, n_4\} \neq \{0\}$,

(c) $k = 2$ és $\{n_3, n_4\} \neq \{0\}$,

(d) $k = 3$ és $n_4 \neq 0$.

Minden más esetben x $\downarrow$-definit elem.

Tekintsük az
$$x_1 = p_1^1 p_2^2 p_3^3 q_1 q_2 q_3 q_4 r^5, \qquad x_2 = f^5(x_1) = p_1^3 p_2^1 p_3^2 q_1^4$$
és
$$y = p_1^2 p_2^3 p_3^4 q_1 q_2 q_3 q_4 r^4$$
elemeket. Ekkor
$$[x_1]_f = [x_2]_f \neq [y]_f\,.$$
Emiatt (x_1, y) és (x_2, y) nem f-tiltott párok. Mivel $f^6(x_1) <_d f^3(x_1)$ és
$$[x_2]_\Phi = \{x_2, f(x_2), f^2(x_2)\}$$
antilánc, azt kapjuk, hogy x_1 $\downarrow$-definit elem, x_2 pedig indefinit elem. Az
$$f^5(x_1) \leq_d f^7(y) \neq f^7(x_1), \qquad f^0(x_2) \leq_d f^7(y) \neq f^7(x_2)$$

és

$$f^6(x_2) \leq_d f^4(y) \neq f^4(x_2)$$

relációkból következik, hogy

$$(x_1, y) \in M_\downarrow \cap P,$$

valamint az, hogy

$$(x_2, y) \in M \cap P.$$

Vegyük továbbá figyelembe, hogy (x_1, y) és (x_2, y) összehasonlíthatatlan párok a $\leq_d$ relációra nézve, így a 3.10. Tétel miatt

$$(x_1, y), (x_2, y) \in (M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P = \mathbf{cl}(A, f, \leq_d).$$

Az $M_\downarrow$ és M halmazok teljes leírása számos aleset vizsgálatával járó hosszú, nagy számolásigényű feladat.

Célszerűbbnek tűnt a $\mathbf{cl}(A, f, \leq_d)$ metszet teljes leírásához számítógépes programot készíteni, amely az A halmaz, az f függvény és a $\leq_d$ reláció megadása után meghatározza a $\mathbf{cl}(A, f, \leq_d)$ halmaz valamennyi elemét. A program alapjául a 3.10. Tétel szolgált. A Maple programcsomaggal készült program képes kezelni az A halmaz elemeinek megváltoztatását, valamint a kitevők módosítását. A program elején megadhatjuk azt a 8 tetszőleges prímszámot, amelyek segítségével előállíthatjuk az A halmaz elemeit. Ezután a kitevők értékeinek maximumát adjuk meg. A lehetséges kitevők számát a továbbiakban n-nel jelöljük. A program kétféleképpen tárolja az elemeket. Az A lista a halmaz konkrét elemeit tartalmazza, a B lista pedig az elemek előállításához szükséges kitevőket tárolja rendezett elemnyolcasok formájában. A program egy C_0 mátrixban tárolja minden elem esetén az f függvény első hat hatványához tartozó rendezett elemnyolcasnak a B listában szereplő indexét. A C_2 mátrix tartalmazza az iteráltak konkrét értékeit.

A teljes program több algoritmusból épül fel. A számolási idő csökkentéséhez célszerű a program elejére az f-tiltott párok keresésére irányuló eljárást beépíteni, ugyanis a metszetben csak azok az elempárok szerepelhetnek, amelyek nem f-tiltott elempárok, így a későbbiek során az $M_\uparrow$, $M_\downarrow$ és M halmazok helyett elegendő lesz az $M_\uparrow \cap P$, $M_\downarrow \cap P$ és $M \cap P$ halmazokat megalkotni. Az f-tiltott párok kereséséhez szükségünk lesz f fixpotjaira és a ciklusok hosszára. Az alábbi algoritmus az f függvény fixpontjait, tehát az

$$x = f(x)$$

összefüggést kielégítő elemeket határozza meg. A fixpontok nem szerepelhetnek f-tiltott párokban sem első, sem második komponensként, így az f-tiltott párok keresésekor figyelmen kívül hagyhatóak. Mellőzhetőek továbbá az A halmaz mindazon x elemei, amelyekre $[x]_f$ tartalmaz fixpontot.

4.9. Algoritmus.

Proc Fixpontok — A futási idő: $\Theta(n)$.
Input: C_0 tömb
B lista
Output: AB tömb
fix lista
for $i \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**
    if az i-edik sor minden eleme egyenlő
        then $fix \leftarrow [fix, i]$
$fixp \leftarrow$ a fix lista konvertálása halmazzá
$sor \leftarrow [\,]$
for $i \leftarrow hossz(B)$ **downto** 1 **do**
    if az i-edik sor tartalmaz fixpontot
        then $sor \leftarrow [sor, i]$
for $i \leftarrow 1$ **to** $hossz(sor)$ **do**
    a C_0 mátrixból az i-edik sor törlése ($= AB$)
RETURN

A 4.9. Algoritmus eredménye az AB tömb, amely a C_0 mátrixhoz hasonlóan tárolja azokat elemeket és azok iteráltjait, ahol az elem iteráltjai között nincs fixpont.

A következő algoritmus adott A-beli x elem esetén határozza meg az x elem f-komponensében ($[x]_f$-ben) található ciklus hosszát.

4.10. Algoritmus.

Proc Ciklus hossza — A futási idő: $\Theta(n)$.
Input: AB tömb

B, sor listák

Output: *ciklus* vektor

for $i \leftarrow 1$ **to** $hossz(AB)$ **do**

  for $j \leftarrow 1$ **to** 5 **do**

    for $k \leftarrow j+1$ **to** 7 **do**

      if az $AB[i,j] = AB[i,k]$

        then $ciklus[i] \leftarrow (k-j)$

RETURN

A 4.10. Algoritmus eredményeképp egy olyan vektort kapunk, amely tartalmazza a ciklusok hosszát.

Az f-tiltott párokat az alábbi algoritmus eredményezi. Az algoritmus alapja a 2.14. Definíció és a 2.15. Állítás.

4.11. Algoritmus.

Proc Tiltott párok A futási idő: $\Theta(n^2)$.

Input: AB tömb

  ciklus vektor

Output: AB tömb

  tiltott lista

$tiltott \leftarrow [\,]$

for $x \leftarrow 1$ **to** $hossz(AB) - 1$ **do**

  for $y \leftarrow x+1$ **to** $hossz(AB)$ **do**

    for $k \leftarrow 1$ **to** 4 **do**

      for $l \leftarrow 1$ **to** 7 **do**

        $u \leftarrow AB[x,1]$, $v \leftarrow AB[y,1]$

        if $AB[x,k] = AB[x,k+ciklus[x]]$ **and**
        $AB[x,k] = AB[y,l]$ **and** $(k-l)$ nem osztható m-mel

        then $tiltott \leftarrow [tiltott, [u, v], [v, u]]$

RETURN

A 4.11. Algoritmus végén az f-tiltott elempárokat egy listában ($tiltott$) kapjuk meg. Ez a lista olyan rendezett elempárokat tartalmaz, amelynek komponenseit az AB mátrix első oszlopából veszi ki az eljárás.

A következő algoritmus a $\downarrow$-definit, $\uparrow$-definit és az indefinit elemeket keresi meg B-ben. Ebben az eljárásban a 3.6. Definíciót implementáljuk.

4.12. Algoritmus.

Proc Nevezetes elemek — A futási idő: $\Theta(n)$.

Input: C tömb

C_0 tömb

Output: $lefele$ lista

$felfele$ lista

$indef$ lista

$lefele \leftarrow [\,]$

$felfele \leftarrow [\,]$

$indef \leftarrow [\,]$

for $i \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**

  for $j \leftarrow 1$ **to** 6 **do**

    for $k \leftarrow j + 1$ **to** 7 **do**

      if $C[C_0[i, j], C_0[i, k]] = 1$ **and** $C_0[i, j] \neq C_0[i, k]$

        then $felfele \leftarrow [felfele, i]$

      if $C[C_0[i, k], C_0[i, j]] = 1$ **and** $C_0[i, j] \neq C_0[i, k]$

        then $lefele \leftarrow [lefele, i]$

$lefelehalmaz \leftarrow$ a $lefele$ lista konvertálása halmazzá

$felfelehalmaz \leftarrow$ a $felfele$ lista konvertálása halmazzá

```
for i ← 1 to hossz(B) do
    if i ∉ lefelehalmaz and i ∉ felfelehalmaz
        then indef ← [indef, i]
RETURN
```

A metszet létrehozásához szükségesek az $M_\uparrow \cap P$, $M_\downarrow \cap P$ és $M \cap P$ halmazok. Itt a 3.9. Definíció adja az eljáráshoz szükséges elméleti hátteret. A $M_\uparrow \cap P$ és $M_\downarrow \cap P$ halmazok meghatározására szolgáló eljárások hasonló szerkezetűek.

4.13. Algoritmus.

A futási idő: $\Theta(n^2)$.

```
Proc Felfeledefinit halmaz
Input:  C tömb
        C_0 tömb
        tilthalmaz halmaz
        felfelehalmaz halmaz
Output: felfeledefinit lista
felfeledefinit ← [ ]
for x ← 1 to hossz(B) do
    for y ← 1 to hossz(B) do
        if [x, y] ∉ tilthalmaz and x ∈ felfelehalmaz then
            for t ← 1 to 7 do
                for m ← 1 to t do
            if C[C_0[x, t], C_0[y, m]] = 1 and C_0[x, m] ≠ C_0[y, m]
                then felfeledefinit ← [felfeledefinit, [x, y]]
RETURN
```

Az $M_\downarrow \cap P$-beli elempárok meghatározása csak abban különbözik az előző algoritmustól, hogy a t és m változók szerepe felcserélődik.

4.14. Algoritmus.

1. **Proc** Lefeledefinit halmaz — A futási idő: $\Theta(n^2)$.
2. **Input:** C tömb
3. C_0 tömb
4. $tilthalmaz$ halmaz
5. $lefelehalmaz$ halmaz
6. **Output:** $lefeledefinit$ lista
7. $lefeledefinit \leftarrow [\,]$
8. **for** $x \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**
9. **for** $y \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**
10. **if** $[x, y] \notin tilthalmaz$ **and** $x \in lefelehalmaz$ **then**
11. **for** $m \leftarrow 1$ **to** 7 **do**
12. **for** $t \leftarrow 1$ **to** m **do**
13. **if** $C[C_0[x, t], C_0[y, m]] = 1$ **and** $C_0[x, m] \neq C_0[y, m]$
14. **then** $lefeledefinit \leftarrow [lefeledefinit, [x, y]]$
15. **RETURN**

Az $M \cap P$ halmaz meghatározása bonyolultabb, hat egymásba ágyazott ciklus segítségével lehet megvalósítani. Ekkor ugyanis a vizsgálandó feltételben több elempárt kell egyszerre összehasonlítani. Ennek az algoritmusnak a futási ideje az előzőekhez hasonlóan $\Theta(n^2)$, azonban a hozzátartozó konstans értéke lényegesen nagyobb.

4.15. Algoritmus.

1. **Proc** Indefinit elempárok halmaza — A futási idő: $\Theta(n^2)$.
2. **Input:** C tömb
3. C_0 tömb

$tilthalmaz$ halmaz

$indefhalmaz$ halmaz

Output: $indefinit$ lista

$indefinit \leftarrow [\,]$

for $x \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**

  for $y \leftarrow 1$ **to** $hossz(B)$ **do**

    if $[x, y] \notin tilthalmaz$ **and** $x \in indefhalmaz$ **then**

      for $t \leftarrow 1$ **to** 7 **do**

        for $m \leftarrow 1$ **to** t **do**

          for $m1 \leftarrow 1$ **to** 7 **do**

            for $t1 \leftarrow 1$ **to** $m1$ **do**

              if $C[C_0[x, t], C_0[y, m]] = 1$ **and** $C_0[x, m] \neq C_0[y, m]$ **and** $C[C_0[x, t1], C_0[y, m1]] = 1$ **and** $C_0[x, m1] \neq C_0[y, m1]$

          then $indefinit \leftarrow [indefinit, [x, y]]$

RETURN

A bemutatott algoritmusok alapján elkészített Maple program és a hozzá tartozó dokumentáció a www.uni-miskolc.hu/∼matszisz honlap Publikációk menüpontja alatt megtalálható és onnan letölthető. Az alábbi példában bemutatjuk egy lehetséges futtatás numerikus jellemzőit.

4.16. Példa.
Ha az első nyolc prímszám felhasználásával alkotjuk meg az A halmaz elemeit, tehát a

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

prímeket tekintjük és a maximális kitevő 1, akkor $|A| = 256$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $|A \times A| = 65536$. Az f függvény hatását egy adott elemre a program úgy kezeli, hogy ha bármely prímszám kitevője a megengedett legnagyobb érték felé esne, akkor ehelyett az 1 szerepel. Ezzel a technikával azt érjük el, hogy az f függvény A-ból A-ba képez. Az f függvényre négy fixpont adódik: $1, 7, 30, 210$. A futási eredményekből megállapíthatjuk, hogy azokban az esetekben, amikor egy f-komponens tartalmaz valódi ciklust, akkor a ciklus hossza kivétel nélkül minden esetben 3. Az f-tiltott párok halmazának számossága 10848. Megjegyezzük, hogy ez az érték akkor sem változik, ha más prímszámokból építjük fel az A halmazt. A nevezetes elemek keresésére irányuló számolások igazolták elméleti eredményeink egyikét, hiszen $\uparrow$-definit elemet a program sem talált. $\downarrow$-definit elemből esetünkben 192 darab, míg indefinit elemből 64 darab van. Továbbá

$$|M_{\uparrow} \cap P| = 0, \quad |M_{\downarrow} \cap P| = 18260, \quad |M \cap P| = 2366$$

és

$$\big|\{(x, x) \mid x \in A\}\big| = 256.$$

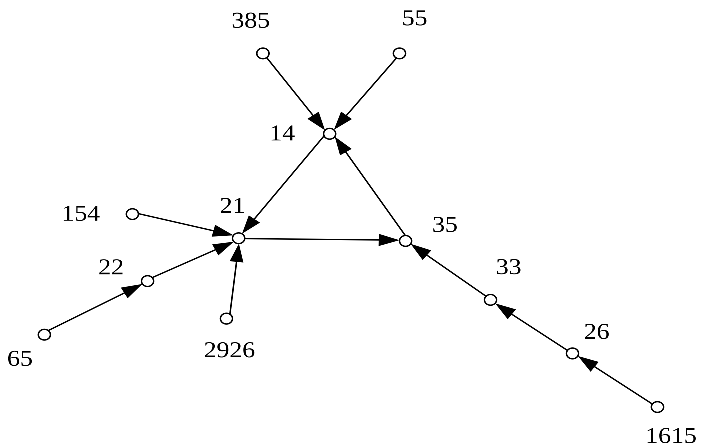
Ennek megfelelően:

$$|\mathbf{cl}(A, f, \leq_d)| = 20882.$$

A kapott eredmények alapján lehetőségünk nyílik arra is, hogy valamennyi f-komponens vázlatát elkészítsük. Ehhez nem kell mást tenni, mint a különböző ciklusokat kiválasztani. Ezek egyike

$$\breve{C} = \{14, 21, 35\}.$$

Egy adott f-komponens továbbépítése az iteráltak felhasználásával az AB tömb alapján könnyen elvégezhető. Az alábbi ábrán a $\breve{C}$ ciklust tartalmazó f-komponens egy részletét mutatjuk be.



4.1. Ábra

Jól látható, hogy a $(33, 1615)$, $(385, 1615)$, $(385, 33)$ és $(26, 65)$ csak néhány azok közül az f-tiltott elempárok közül, amelyek a 4.1. Ábráról leolvashatóak.

Az alábbi táblázat a Maple program futásához szükséges időket tartalmazza. A programot két gépen futtattuk, az (1) gép fontosabb jellemzői:

- Intel Pentium 4, 3 GHz processzor
- 1GB memória
- Windows XP operációs rendszer.

A (2) gép jellemzői:

- Intel Core2 Quad Q9550, 2,83 GHz processzor
- 4GB memória
- 64 bit-es Windows Vista ultimate operációs rendszer.

Feladat:	**Eltelt idő (1)**	**Számításhoz szükséges idő (1)**	**Eltelt idő (2)**	**Számításhoz szükséges idő (2)**
P, A és B kialakítása	0.000 s	0.000 s	0.000 s	0.000 s
C létrehozása	0.578 s	0.578 s	0.234 s	0.234 s
C_0, C_2 megalkotása	4.640 s	4.062 s	1.529 s	1.259 s
fixpontok meghatározása	5.140 s	0.500 s	1.716 s	0.187 s
ciklusok vizsgálata	5.202 s	0.062 s	1.747 s	0.031 s
tiltott párok számítása	76.749 s	71.547 s	18.767 s	17.02 s
nevezetes elemek meghatározása	76.827 s	0.078 s	18.830 s	0.063 s
felfele def. halmaz létrehozása	76.827 s	0.000 s	18.830 s	0.000 s
lefele def. halmaz létrehozása	630.577 s	553.750 s	140.466 s	121.636 s
indef halmaz létrehozása	950.499 s	319.922 s	244.503 s	104.037 s
a metszet létrehozása	1159.313 s	208.814 s	288.325 s	43.822 s

5 Kongruenciák részbenrendezett halmazokon

Jelen fejezetben megadjuk a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak és intervallum-kongruenciáinak számos tulajdonságát. Bizonyítjuk továbbá, hogy egy véges részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái olyan relatív komplementumos hálót hoznak létre, amely teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, annak ellenére, hogy általában nem féligmoduláris. Azt is megmutatjuk, hogy ez a háló akkor és csak akkor gyengén 0-disztributív, ha $(A, \leq_r)$ lánc vagy két elemből álló antilánc.

A fejezet eredményei az [SZ1], [SZ3] dolgozatokban, valamint a szerző Radeleczki Sándorral és Körtesi Péterrel közös [SZ2] és [SZ5] cikkeiben kerültek publikálásra.

5.1 Rendezés-kongruenciák jellemzői

Ha $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, akkor jelölje $[x]_\rho$ az $x \in A$ elem ekvivalencia osztályát, A/ρ pedig jelölje a ρ valamennyi ekvivalencia osztályának halmazát. A továbbiakban Δ jelöli az identikus relációt, ∇ pedig a teljes relációt az A halmazon.

Az alábbi definíció alapjául a [10] cikk szolgált.

5.1. Definíció.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció A-n.

(1) Az $x_0, x_1, ..., x_n \in A$, $(n \geq 1)$ sorozatot ρ-sorozatnak nevezzük, ha bármely $i \in \{1, ..., n\}$ esetén vagy $(x_{i-1}, x_i) \in \rho$ vagy $x_{i-1} <_r x_i$ (azaz $(x_{i-1}, x_i) \in \rho \cup r$). Ha $x_0 = x_n$, akkor ρ-körről szólunk.

(2) A ρ reláció rendezés-kongruencia az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazon, ha minden $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ ρ-kör esetén

$$[x_0]_\rho = [x_1]_\rho = ... = [x_n]_\rho$$

teljesül.

5.2. Megjegyzés.
Ha R kiterjesztése $\leq_r$-nek, akkor az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz minden ρ-sorozata és ρ-köre $(A, \leq_R)$-nek is ρ-sorozata és ρ-köre. Ezért az $(A, \leq_R)$ minden rendezés-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek is rendezés-kongruenciája.

5.3. Definíció.
Ha $(A, \leq_r)$ és $(B, \leq_s)$ részbenrendezett halmazok és $f : A \to B$, akkor az f függvényt izotonnak (rendezésőrzőnek) nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ és $x \leq_r y$ esetén $f(x) \leq_s f(y)$.

5.4. Definíció.
Egy $f : A \to B$ függvény magján (kerneljén) a következő A-ból A-ba irányuló relációt értjük:

$$\mathrm{Ker}(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A \textit{ és } f(x) = f(y)\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathrm{Ker}(f) \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció.

5.5. Állítás.
Ha $f : (A, \leq_r) \to (B, \leq_s)$ rendezéstartó függvény, akkor $\mathrm{Ker}(f) \subseteq A \times A$ rendezéskongruenciája $(A, \leq_r)$-nek.

Bizonyítás:
Legyen $x_0, x_1, ..., x_n \in A$, $(x_i, x_{i+1}) \in r \cup \mathrm{Ker}(f)$ minden $i \in \{0, ..., n-1\}$ esetén és $x_0 = x_n$. Ekkor $f(x_i) \leq_s f(x_{i+1})$ minden i-re, azaz

$$f(x_0) \leq_s f(x_1) \leq_s ... \leq_s f(x_n) = f(x_0),$$

ahonnan

$$f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n),$$

tehát

$$[x_0]_{\mathrm{Ker}(f)} = [x_1]_{\mathrm{Ker}(f)} = ... = [x_n]_{\mathrm{Ker}(f)}.$$

□

5.6. Állítás.
Legyen ρ rendezés-kongruencia az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazon. Ekkor az

$$r/\rho = \{([x]_\rho, [y]_\rho) \mid x, y \in A \textit{ és létezik } x = x_0, x_1, ..., x_n = y \textit{ alakú } \rho\textit{-sorozat}\}$$

reláció jól definiált és részbenrendezése A/ρ-nak. Továbbá a

$$\kappa : A \to A/\rho$$

kanonikus leképezés $(\leq_r, \leq_{r/\rho})$ szerint izoton.

Bizonyítás:
Ha $([x]_\rho, [y]_\rho) \in r/\rho$ és $x' \in [x]_\rho$, $x' \neq x$, továbbá $y' \in [y]_\rho$, $y' \neq y$, akkor $([x]_\rho, [y]_\rho) \in r/\rho$ miatt létezik

$$x = x_0, ..., x_n = y$$

ρ-sorozat, ahol $x, y \in A$. $x' \in [x]_\rho$ miatt $x'\rho x$, vagyis x', x egy ρ-sorozat. Továbbá $y' \in [y]_\rho$ miatt $y'\rho y$. ρ szimmetriája miatt $y\rho y'$ is teljesül, így y, y' szintén ρ-sorozat. Ekkor

$$x', x = x_0, ..., x_n = y, y'$$

ρ-sorozat, tehát $([x']_\rho, [y']_\rho) \in r/\rho$, azaz r/ρ jól definiált.

Világos, hogy r/ρ reflexív és tranzitív. Az antiszimmetria bizonyításához tegyük fel, hogy valamely $x, y \in A$ esetén

$$[x]_\rho \leq_{r/\rho} [y]_\rho \qquad \text{és} \qquad [y]_\rho \leq_{r/\rho} [x]_\rho.$$

Ekkor létezik olyan $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ ρ-sorozat, amelyre

$$x_0 = x \qquad \text{és} \qquad x_n = y,$$

továbbá olyan $y_0, y_1, ..., y_m$ ρ-sorozat is létezik, amelyre

$$y_0 = y \qquad \text{és} \qquad y_m = x.$$

Természetesen ekkor

$$x = x_0, x_1, ..., x_n, y_0, y_1, ..., y_m = x$$

ρ-kör, így megkaptuk, hogy

$$[x]_\rho = [x_0]_\rho = [x_n]_\rho = [y]_\rho.$$

A

$$\kappa : A \to A/\rho, \qquad \kappa(x) = [x]_\rho$$

kanonikus projekció izoton módon képezi le az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazt a $\left(A/\rho, \leq_{r/\rho}\right)$ faktor-részbenrendezett halmazba, mert bármely olyan $x, y \in A$ esetén, amelyekre $x \leq_r y$, az x, y egy ρ-sorozat, és így azt kapjuk, hogy $[x]_\rho \leq_{r/\rho} [y]_\rho$, azaz

$$\kappa(x) \leq_{r/\rho} \kappa(y).$$

□

5.7. Következmény.
Az 5.5. Állítás és az 5.6. Állítás alapján ρ akkor és csak akkor rendezés-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek, ha van olyan $(B, \leq_s)$ részbenrendezett halmaz és olyan $f : A \to B$ $(\leq_r, \leq_s)$ rendezéstartó függvény, hogy $\rho = Ker(f)$.

Egy $\theta \subseteq A^2$ bináris relációt kvázirendezésnek nevezünk az A halmazon, ha reflexív és tranzitív. Ha θ kvázirendezés, akkor θ^{-1} is kvázirendezés, továbbá $\theta \cap \theta^{-1}$ ekvivalenciareláció A-n. Jelölje $Quord(A)$ az A halmaz összes kvázirendezésének halmazát, tehát:

$$Quord(A) = \{\theta \subseteq A \times A \mid \theta \text{ kvázirendezés}\}.$$

$(Quord(A), \cap, \vee)$ teljes háló, azaz bármelyik részhalmazának létezik szuprémuma és infimuma. A megtett előkészületek után megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

5.8. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció A-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

(1) ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en.

(2) $\overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1} = \rho$.

(3) $Quord(A)$-ban $(r \vee \rho) \cap (r^{-1} \vee \rho) = \rho$.

(4) Létezik olyan $\theta \subseteq A \times A$ kvázirendezés, amire $r \subseteq \theta$ és $\theta \cap \theta^{-1} = \rho$.

(5) Létezik olyan $r \subseteq R$ lineáris kiterjesztés, amelyre ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_R)$-en.

Bizonyítás:

(1)⇒(2). Ha ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, akkor $\rho \subseteq r \cup \rho$ miatt $\rho \subseteq \overline{r \cup \rho}$ nyilvánvalóan teljesül. Mivel

$$\rho = \rho^{-1} \subseteq (\overline{r \cup \rho})^{-1},$$

így

$$\rho \subseteq \overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1}.$$

Legyen $(x, y) \in \overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1}$, azaz

$$(x, y) \in (r \cup \rho) \circ (r \cup \rho) \circ ... \circ (r \cup \rho) = (r \cup \rho)^n,$$

tehát
$$x = z_0(r \cup \rho)z_1(r \cup \rho)...(r \cup \rho)z_{n-1}(r \cup \rho)z_n = y.$$
Továbbá $(y, x) \in \overline{r \cup \rho}$ is fennáll, vagyis $(y, x) \in (r \cup \rho)^m$, azaz
$$y = u_0(r \cup \rho)u_1(r \cup \rho)...(r \cup \rho)u_{m-1}(r \cup \rho)u_m = x.$$
Tehát
$$x = z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_n = y = u_0, u_1, ..., u_{m-1}, u_m = x$$
egy ρ-kör. Mivel ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, ezért a fenti ρ-körre
$$[x]_\rho = [z_0]_\rho = ... = [z_n]_\rho = [y]_\rho = [u_0]_\rho = [u_1]_\rho = ... = [u_m]_\rho = [x]_\rho,$$
ahonnan $[x]_\rho = [y]_\rho$, azaz $(x, y) \in \rho$ adódik.

(2)⇔(3). A Quord(A) hálóban
$$r \vee \rho = \overline{r \cup \rho}$$
definíció szerint teljesül. Ennek megfelelően
$$r^{-1} \vee \rho = \overline{r^{-1} \cup \rho}.$$
Azt kell még megmutatni, hogy $\overline{r^{-1} \cup \rho} = (\overline{r \cup \rho})^{-1}$.
$$(\overline{\alpha})^{-1} = (\alpha \cup \alpha \circ \alpha \cup \alpha \circ \alpha \circ \alpha \cup ... \cup \alpha^k)^{-1} = \alpha^{-1} \cup (\alpha \circ \alpha)^{-1} \cup ... =$$
$$\alpha^{-1} \cup \alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} \cup \alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^{-1} \cup ... = \overline{\alpha^{-1}},$$
azaz
$$(\overline{r \cup \rho})^{-1} = \overline{(r \cup \rho)^{-1}} = \overline{r^{-1} \cup \rho^{-1}} = \overline{r^{-1} \cup \rho},$$
mivel $\rho = \rho^{-1}$.

(2)⇒(4). Nyilvánvaló a $\theta = \overline{r \cup \rho}$ választással.

(4)⇒(1). Tegyük fel, hogy $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = x$ egy ρ-kör. Ekkor $(x_i, x_{i+1}) \in r \cup \rho$, azaz
$$(x_i, x_{i+1}) \in \rho \qquad \text{vagy} \qquad x_i <_r x_{i+1}.$$
Tehát
$$(x_i, x_{i+1}) \in \theta \cap \theta^{-1} \qquad \text{vagy} \qquad (x_i, x_{i+1}) \in r \subseteq \theta.$$
Azaz
$$x = x_0\theta x_1\theta x_2\theta...\theta x_{n-1}\theta x_n = x,$$
ahonnan $x\theta x_i$, $i \in \{1, 2..., n\}$ következik θ tranzitivitása miatt. Továbbá
$$x = x_n\theta^{-1}x_{n-1}\theta^{-1}...\theta^{-1}x_1\theta^{-1}x_0 = x,$$

ahonnan $x\theta^{-1}x_i$, $i \in \{1, 2..., n\}$ adódik θ^{-1} is tranzitivitása miatt. Tehát

$$x(\theta \cap \theta^{-1})x_i, \quad \text{azaz} \quad x\rho x_i,$$

illetve $[x]_\rho = [x_i]_\rho$ minden i-re, ami azt jelenti, hogy ρ rendezés-kongruencia.

(1)⇒(5). Az 5.7. Következmény miatt van $f : (A, \leq_r) \to (B, \leq_s)$ izoton függvény úgy, hogy $\mathrm{Ker}(f) = \rho$. Legyen $s \subseteq S$ egy lineáris kiterjesztés B-n és tekintsük az

$$f^{-1}(S) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ vagy } f(x) <_S f(y)\}$$

ősképet, ami nyilván olyan részbenrendezése A-nak, amire $r \subseteq f^{-1}(S)$. Ha $R \supseteq f^{-1}(S)$ tetszőleges lineáris kiterjesztés, akkor

$$f : (A, \leq_R) \to (B, \leq_S)$$

rendezéstartó lesz (ez elegendő $\rho = \mathrm{Ker}(f)$ miatt).
Tegyük fel, hogy $x \leq_R y$ és $f(x) \nleq_S f(y)$. Most $f(y) <_S f(x)$, mert S lineáris. Így $(y, x) \in f^{-1}(S)$, azaz $(y, x) \in R$ is teljesül. Tehát $x \leq_R y$ és $y \leq_R x$ alapján $x = y$ adódik ellentmondásban $f(x) \nleq_S f(y)$-nal.

(5)⇒(1). Triviális az 5.2. Megjegyzés szerint. □

5.9. Definíció.
Az $I \subseteq A$ nemüres halmazt az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz intervallumának (vagy moduljának) nevezzük, ha bármely $a, b \in I$ és $x, y \in A \setminus I$ elemre $x < a$ esetén $x < b$, illetve $a < y$ esetén $b < y$ következik.

5.10. Definíció.
A $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz intervallum-kongruenciája, ha minden $[x]_\rho \subseteq A$ ekvivalencia osztály intervalluma $(A, \leq_r)$-nek.

5.11. Állítás.
Ha $\rho \subseteq A \times A$ egy rendezés-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek, ahol R lineáris, akkor ρ intervallum-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek.

Bizonyítás:
Legyen $u \in A$ és $a, b \in [u]_\rho$. Ekkor nyilván $[u]_\rho = [a]_\rho = [b]_\rho$. Legyen továbbá $x, y \in A \setminus [u]_\rho$. Ha $x <_R a$ és $x \nless_R b$, akkor R linearitása és $b \neq x$ miatt $b <_R x$. Ekkor

$$x <_R a\rho b <_R x$$

ρ-kör, tehát

$$[x]_\rho = [a]_\rho = [b]_\rho = [x]_\rho,$$

ami ellentmond annak, hogy $x \in A \setminus [u]_\rho$. Hasonlóan kapható az $a <_R y$ egyenlőtlenségből $b <_R y$. $\square$

5.12. Állítás.
Ha $f : (A, \leq_r) \to (B, \leq_s)$ rendezéstartó, akkor

$$f^{-1}(s) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ vagy } f(x) <_s f(y)\}$$

olyan részbenrendezés, amire $r \subseteq f^{-1}(s)$ és Ker(f) intervallum-kongruencia $(A, \leq_{f^{-1}(s)})$-en.

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a $\mathrm{Ker}(f) = \rho$ jelölést. Legyen $a, b \in [u]_\rho$ és $x \notin [u]_\rho$. Tegyük fel, hogy $x <_{f^{-1}(s)} a$. Ekkor

$$x \leq_r a \qquad \text{vagy} \qquad f(x) <_s f(a) = f(b),$$

ahonnan

$$f(x) \leq_s f(a) = f(b)$$

következik. Ha $f(x) \neq f(b)$, akkor

$$x <_{f^{-1}(s)} b.$$

Ha $f(x) = f(a) = f(b)$, akkor $x \in [a]_\rho$, ami ellentmondás, mert $x \notin [u]_\rho = [a]_\rho$. Hasonlóan kapható az $a <_{f^{-1}(s)} y$ egyenlőtlenségből $b <_{f^{-1}(s)} y$. $\square$

5.13. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és ρ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) ρ intervallum-kongruencia $(A, \leq_r)$-en.

(2) $\rho \cup r$ tranzitív.

(3) ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, valamint a $\kappa : A \to A/\rho$ kanonikus leképezésre és a $\leq_{r/\rho}$ indukált részbenrendezés

$$\kappa^{-1}(r/\rho) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ vagy } \kappa(x) <_{r/\rho} \kappa(y)\}$$

ősképére $\kappa^{-1}(r/\rho) = r$.

(4) Léteznek olyan $r \subseteq R_i$, $i \in I$ lineáris kiterjesztések, amelyekre $r = \bigcap_{i \in I} R_i$ és ρ rendezés- ($\Leftrightarrow$ intervallum) kongruenciája $(A, \leq_{R_i})$-nek minden i-re.

Bizonyítás:

(1) $\Rightarrow$ *(2)*. Tegyük fel, hogy ρ intervallum-kongruencia $(A, \leq_r)$-en. Legyen $(x, y) \in r \cup \rho$ és $(y, z) \in r \cup \rho$. Négy esetet kell vizsgálnunk.

- Ha $(x, y) \in r$ és $(y, z) \in r$, akkor r tranzitivitása miatt $(x, z) \in r \cup \rho$.
- Hasonlóan, ha $(x, y) \in \rho$ és $(y, z) \in \rho$, akkor ρ tranzitivitása miatt $(x, z) \in r \cup \rho$.
- Legyen $(x, y) \in \rho$ és $(y, z) \in r$. Tegyük fel, hogy $(x, z) \notin \rho$. Belátjuk, hogy ekkor $(x, z) \in r$. $(x, z) \notin \rho$ miatt $z \notin [x]_\rho = [y]_\rho$. Mivel $y \leq_r z$, sőt $y <_r z$ és $[x]_\rho \subseteq A$ intervallum r-szerint (ugyanis ρ intervallum-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek), így $x, y \in [x]_\rho$ miatt $x <_r z$, azaz $(x, z) \in r$. Tehát $(x, z) \in r \cup \rho$.
- Az $(x, y) \in r$ és $(y, z) \in \rho$ esetben a fentiekhez hasonlóan járhatunk el.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*. Most

$$\overline{\rho \cup r} = \rho \cup r \qquad \text{és} \qquad (\overline{\rho \cup r})^{-1} = (\rho \cup r)^{-1},$$

tehát

$$\overline{\rho \cup r} \cap (\overline{\rho \cup r})^{-1} = (\rho \cup r) \cap (\rho \cup r)^{-1} = (\rho \cup r) \cap (\rho^{-1} \cup r^{-1}) =$$

$$(\rho \cup r) \cap (\rho \cup r^{-1}) = \rho \cup (r \cap r^{-1}) = \rho \cup \Delta = \rho.$$

Így az 5.8. Tétel *(2)* része alapján ρ rendezés-kongruencia.

Az $r \subseteq \kappa^{-1}(r/\rho)$ tartalmazás az 5.12. Állítás miatt nyilvánvalóan teljesül. Legyen $(x, y) \in \kappa^{-1}(r/\rho)$. Ekkor

$$x \leq_r y \qquad \text{vagy} \qquad [x]_\rho <_{r/\rho} [y]_\rho.$$

Ha $[x]_\rho <_{r/\rho} [y]_\rho$, akkor definíció szerint (lásd 5.6. Állítás) létezik olyan ρ-sorozat, hogy

$$x = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = y,$$

ahol $(x_{i-1}, x_i) \in r \cup \rho$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. $r \cup \rho$ tranzitivitása miatt $(x, y) \in r \cup \rho$ is igaz és $[x]_\rho <_{r/\rho} [y]_\rho$ miatt $[x]_\rho \neq [y]_\rho$, azaz $(x, y) \notin \rho$, ahonnan $(x, y) \in r$ következik. Tehát $\kappa^{-1}(r/\rho) \subseteq r$ is fennáll.

(3) $\Rightarrow$ *(4)*. Tekintsük a

$$\kappa : (A, \leq_r) \to (A/\rho, \leq_{r/\rho})$$

kanonikus leképezést, amely $(\leq_r, \leq_{r/\rho})$ rendezéstartó. Legyen $\{L_i \mid i \in I\}$ egy tetszőleges realizátora r/ρ-nak. Ekkor

$$\bigcap_{i\in I} L_i = r/\rho.$$

Minden $r/\rho \subseteq L_i$ lineáris kiterjesztésre adjuk meg a $\kappa^{-1}(L_i)$ őskép rendezés egy $\mathcal{R}_i$ realizátorát. Így $R \in \mathcal{R}_i$ esetén $\kappa^{-1}(L_i) \subseteq R$ egy lineáris kiterjesztés és

$$\bigcap_{R\in\mathcal{R}_i} R = \kappa^{-1}(L_i).$$

Azt fogjuk bizonyítani, hogy $\mathcal{R} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ egy olyan realizátora r-nek, amely megfelelő. Nyilvánvaló, az 5.8. Tétel bizonyításának *(1)⇒(5)* része szerint, hogy bármely $R \in \mathcal{R}$ esetén

$$\kappa : (A, \leq_R) \to (A/\rho, \leq_{L_i})$$

rendezéstartó, azaz $\rho = \mathrm{Ker}(\kappa)$ rendezés-kongruencia $(A, \leq_R)$-en. Annyit kell még igazolni, hogy

$$\bigcap_{R\in\mathcal{R}} R = r.$$

Most

$$\bigcap_{R\in\mathcal{R}} R = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{R\in\mathcal{R}_i} R\right) = \bigcap_{i\in I}\kappa^{-1}(L_i) = \kappa^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} L_i\right) = \kappa^{-1}(r/\rho) = r.$$

(4) ⇒ (1). Tegyük fel, hogy *(4)* teljesül és tekintsük a ρ valamely $[u]_\rho$ ekvivalencia osztályát. Legyenek $a, b \in [u]_\rho$ és $x, y \in A \setminus [u]_\rho$ tetszőleges elemek úgy, hogy

$$x <_r a \qquad \text{és} \qquad a <_r y.$$

Mivel minden R_i a $\leq_r$ reláció kiterjesztése, ezért bármely $i \in I$ esetén

$$x <_{R_i} a \qquad \text{és} \qquad a <_{R_i} y$$

adódik. Az 5.11. Állítás szerint $[u]_\rho$ intervalluma az összes $(A, \leq_{R_i})$ rendezett halmaznak, ezért

$$x <_{R_i} b \qquad \text{és} \qquad b <_{R_i} y$$

teljesül minden R_i lineáris kiterjesztésre. Mivel $\bigcap_{i\in I} R_i = r$ és $x \neq b \neq y$, ezért

$$x <_r b \qquad \text{és} \qquad b <_r y$$

adódik, bizonyítva azt, hogy $[u]_\rho$ intervalluma $(A, \leq_r)$-nek. Tehát ρ intervallum-kongruenciája az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaznak. $\square$

5.14. Következmény.
Ha $\rho \subseteq A \times A$ egy intervallum-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek, akkor rendezés-kongruenciája is.

Bizonyítás:
Az 5.13. Tételbeli *(2)* szerint $\theta = r \cup \rho$ kvázirendezés. Most $r \subseteq \theta$ és

$$\theta \cap \theta^{-1} = (r \cup \rho) \cap (r \cup \rho)^{-1} = (r \cup \rho) \cap (r^{-1} \cup \rho^{-1}) = (r \cup \rho) \cap (r^{-1} \cup \rho) =$$

$$(r \cap r^{-1}) \cup \rho = \Delta \cup \rho = \rho,$$

és így az 5.8. Tételbeli *(4)* szerint ρ rendezés-kongruencia. □

5.15. Megjegyzés.
Az 5.14. Következmény megfordítása általában nem igaz.

5.16. Példa.
Tekintsük azt az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazt, ahol $A = \{x, y, z, u\}$ és $r = \{(x, y), (z, u)\} \cup \Delta$. Könnyen látható, hogy a

$$\rho = \{(y, z), (z, y)\} \cup \Delta \subset A \times A$$

ekvivalenciareláció rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en. Ekkor

$$(x, y) \in r, \qquad (y, z) \in \rho, \qquad (z, u) \in r.$$

Azonban $(x, u) \notin r \cup \rho$, vagyis $r \cup \rho$ nem tranzitív, így az 5.13. Tétel miatt ρ nem intervallum -kongruencia $(A, \leq_r)$-en.

5.2 RENDEZÉS-KONGRUENCIÁK HÁLÓJÁNAK TULAJDONSÁGAI

Jelölje $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ vagy röviden $\mathcal{O}(A)$ az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz valamennyi rendezés-kongruenciájának halmazát. Az $(\mathcal{O}(A), \subseteq)$ egy részbenrendezett halmaz a halmazelméleti tartalmazásra nézve.

5.17. Állítás.
Az $(\mathcal{O}(A), \subseteq)$ olyan teljes háló, amelynek legnagyobb eleme ∇, továbbá

$$\sqcap_{i \in I} \theta_i = \inf\{\theta_i \mid i \in I\} = \cap\{\theta_i \mid i \in I\}$$

és

$$\sqcup_{i \in I} \theta_i = \sup\{\theta_i \mid i \in I\} = \bigcap_{\substack{\cup_{i \in I} \theta_i \subseteq \nu, \\ \nu \in \mathcal{O}(A)}} \nu$$

$\theta_i \in \mathcal{O}(A)$, $i \in I$ esetén.

5.18. Definíció.
Egy L hálót féligmoduláris hálónak nevezünk, ha az alábbi - ekvivalens - feltételek egyike teljesül:

(FM1) bármely $x, y \in L$ elemekre $x \wedge y \prec x \Rightarrow y \prec x \vee y$;

(FM2) bármely $a, b, c \in L$ elemekre $a \prec b \Rightarrow a \vee c \preceq b \vee c$.

A [19] és a [36] cikkeknek megfelelően az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz intervallum-kongruenciái teljes féligmoduláris részhálóját alkotják az $(\mathrm{Eq}(A), \cap, \vee)$ ekvivalencia hálónak, amelyet a továbbiakban $(\mathcal{D}(A), \cap, \vee)$ (röviden $\mathcal{D}(A)$) módon jelölünk az intervallum-dekompozíciókra utalva. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{O}(A)$ általában nem részhálója Eq(A)-nak és nem féligmoduláris háló.

5.19. Definíció.
Legyen L olyan háló, amelyiknek van legkisebb eleme. Jelölje ezt $\boldsymbol{0}$. Az L háló azon a elemeit, amelyekre $\boldsymbol{0} \prec a$, L atomjainak nevezzük. Ha $\boldsymbol{1} \in L$ (legnagyobb elem) és $b \prec \boldsymbol{1}$, akkor a $b \in L$ elemet duális atomnak nevezzük.

5.20. Definíció.
Ha L teljes háló és L minden eleme előáll atomok egyesítéseként, akkor L-t atomisztikus hálónak mondjuk.

A [35] és [36] cikkekben a szerzők bizonyították, hogy amennyiben $(A, \leq_r)$ véges lánc, akkor $\mathcal{D}(A)$ Boole-részhálója az Eq(A) hálónak. (Ennek az eredménynek egy ekvivalens megfogalmazása a [45] dolgozatban is megtalálható.) Azt is igazolták, hogy $\mathcal{D}(A)$ valamennyi atomja

$$\nu_{\{a,b\}} = \{a, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\big\}$$

alakú, ahol $a, b \in A$ és $a \prec b$ (itt $\nu_{\{a,b\}}$ megadása ekvivalencia osztályokkal történt). Tekintsük a következő állítást.

5.21. Állítás.

(1) Ha $(A, \leq_r)$ lánc, akkor az $\mathcal{O}(A)$ és a $\mathcal{D}(A)$ hálók megegyeznek. Ha ezen felül A véges és $\varphi \prec \theta$ teljesül $\mathcal{O}(A)$-ban, akkor ugyanez a rákövetkezés igaz Eq*(A)-ban.*

(2) Ha $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és R lineáris kiterjesztése r-nek, akkor $\mathcal{O}(A, \leq_R)$ részhálója $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-nek.

Bizonyítás:

(1) Az 5.11. Állítás miatt
$$\mathcal{O}(A) = \mathcal{D}(A).$$
(1) második állításának bizonyításához elegendő megmutatni azt, hogy ha $\varphi \prec \theta$ teljesül $\mathcal{D}(A)$-ban, akkor $\varphi \prec \theta$ teljesül Eq(A)-ban is. Mivel $\mathcal{D}(A)$ véges Boole-háló, így atomisztikus is. Ezért
$$\theta = \varphi \vee \nu_{\{a,b\}}$$
teljesül valamely $\nu_{\{a,b\}} \in \mathcal{D}(A)$ atomra, ahol $a, b \in A$ és $a \prec b$. Természetesen $\Delta \prec \nu_{\{a,b\}}$ teljesül Eq(A)-ban is. Mivel $\varphi \cap \nu_{\{a,b\}} = \Delta$ és mert Eq(A) féligmoduláris háló, így azt kapjuk, hogy $\varphi \prec \varphi \vee \nu_{\{a,b\}}$, azaz $\varphi \prec \theta$ teljesül Eq(A)-ban is.

(2) Mivel az 5.2. Megjegyzés miatt $\mathcal{O}(A, \leq_R) \subseteq \mathcal{O}(A, \leq_r)$ és mert a metszet műveletek megegyeznek, így $\mathcal{O}(A, \leq_R)$ részfélhálója $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-nek. Legyen $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{O}(A, \leq_R)$. Mivel $\mathcal{O}(A, \leq_R) = \mathcal{D}(A, \leq_R)$, és mert $\mathcal{D}(A, \leq_R)$ részhálója Eq(A)-nak, így azt kapjuk, hogy
$$\pi_1 \vee \pi_2 \in \mathcal{O}(A, \leq_R) \subseteq \mathcal{O}(A, \leq_r).$$
A $\pi_1 \vee \pi_2 \subseteq \pi_1 \sqcup \pi_2$ tartalmazás nyilvánvaló. Továbbá
$$\pi_1 \sqcup \pi_2 = \bigcap_{\substack{\nu \in \mathcal{O}(A, \leq_r) \\ \pi_1, \pi_2 \subseteq \nu}} \nu \ \subseteq \bigcap_{\substack{\nu \in \mathcal{O}(A, \leq_R) \\ \pi_1, \pi_2 \subseteq \nu}} \nu \ = \pi_1 \vee \pi_2.$$
Tehát $\pi_1 \sqcup \pi_2 = \pi_1 \vee \pi_2$, így $\mathcal{O}(A, \leq_R)$ részhálója $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-nek. □

Az alábbi állítás bizonyítása könnyen elvégezhető.

5.22. Állítás.
Legyenek φ és θ az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái úgy, hogy $\varphi \subseteq \theta$. A
$$\tilde{\kappa} : A/\varphi \to A/\theta, \qquad \tilde{\kappa}\big([x]_\varphi\big) = [x]_\theta$$
szűrjektív és rendezésőrző függvény az $(A/\varphi, \leq_{r/\varphi})$ részbenrendezett halmazból az $(A/\theta, \leq_{r/\theta})$ részbenrendezett halmazba.

A következő lemmát az 5.25. Tétel bizonyításához fogjuk használni.

5.23. Lemma.
Legyenek φ és θ az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái úgy, hogy $\varphi \subseteq \theta$. Ekkor létezik az A halmazon az r részbenrendezésnek olyan R lineáris kiterjesztése, amelyre φ és θ egyaránt rendezés-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek.

Bizonyítás:
Ha φ és θ az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és $\varphi \subseteq \theta$, akkor az 5.22. Állítás miatt léteznek olyan

$$f : (A, \leq_r) \to (B, \leq_s) \qquad \text{és} \qquad g : (B, \leq_s) \to (C, \leq_q)$$

rendezésőrző függvények, amelyekre

$$\varphi = \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f) = \theta.$$

Tekintsük a q részbenrendezés Q lineáris kiterjesztését. Ekkor az 5.8. Tétel bizonyításának *(1)⇒(5)* része miatt a

$$g^{-1}(Q) = \{(b_1, b_2) \in B \times B \mid b_1 \leq_s b_2 \text{ vagy } g(b_1) <_Q g(b_2)\}$$

őskép olyan részbenrendezése B-nek, amire $s \subseteq g^{-1}(Q)$ teljesül. Jelölje S a $g^{-1}(Q)$ őskép tetszőleges lineáris kiterjesztését, azaz

$$s \subseteq g^{-1}(Q) \subseteq S.$$

Ekkor az

$$f^{-1}(S) = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid a_1 \leq_r a_2 \text{ vagy } f(a_1) <_S f(a_2)\}$$

ősképre $r \subseteq f^{-1}(S)$. Tekintsük az $f^{-1}(S)$ reláció tetszőleges R lineáris kiterjesztését. Ekkor

$$r \subseteq f^{-1}(S) \subseteq R$$

és az 5.8. Tétel bizonyításának *(1)⇒(5)* része alapján

$$f : (A, \leq_R) \to (B, \leq_S) \qquad \text{és} \qquad g : (B, \leq_S) \to (C, \leq_Q)$$

rendezésőrző függvények. Így

$$g \circ f : (A, \leq_R) \to (C, \leq_Q)$$

is rendezésőrző. Tehát $\varphi = \mathrm{Ker}(f)$ és $\theta = \mathrm{Ker}(g \circ f)$ rendezés-kongruenciák $(A, \leq_R)$-en. □

5.24. Megjegyzés.
Az 5.23. Lemma bizonyításában látottak szerint az is igazolható, hogy adott $\theta_1 \subseteq \theta_2 \subseteq ... \subseteq \theta_k$ $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-beli rendezés-kongruenciák esetén létezik olyan $r \subseteq R$ lineáris kiterjesztés, amelyre minden θ_i, $1 \leq i \leq k$ rendezés-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek.

Azt mondjuk, hogy egy $(L, \leq)$ háló teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, ha bármely $a, b \in L$, $a < b$ elemekre az a és b közötti maximális láncok hossza megegyezik. Arra nézve, hogy egy részbenrendezett halmaz eleget tegyen a Jordan-Hölder lánckövetelménynek, Ore ([37]) és Croisot ([8]) dolgozatai adnak bizonyos szükséges és elégséges feltételeket. A következő tétel, véges részbenrendezett halmaz esetén, a rendezés-kongruenciák hálójának olyan tulajdonságait tartalmazza, amelyekből megkapható, hogy ez a háló teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt.

5.25. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz. Ekkor az $\mathcal{O}(A)$ háló relatív komplementumos. Ha a $\varphi \prec \theta$ rákövetkezés teljesül $\mathcal{O}(A)$-ban valamely $\varphi, \theta \in \mathcal{O}(A)$ esetén, akkor ugyanez következik be $\mathrm{Eq}(A)$*-ban is. Következésképpen $\mathcal{O}(A)$ is teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt.*

Bizonyítás:
Legyen $\varphi, \theta \in \mathcal{O}(A, \leq_r)$ úgy, hogy $\varphi \subseteq \theta$ és tekintsünk egy $\nu \in [\varphi, \theta]$ elemet az $\mathcal{O}(A)$-beli $[\varphi, \theta]$ intervallumból. Ekkor $\varphi \subseteq \nu \subseteq \theta$ teljesül és az 5.24. Megjegyzés miatt van olyan R lineáris kiterjesztése r-nek az A halmazon, hogy $\varphi, \nu, \theta \in \mathcal{O}(A, \leq_R)$. Az 5.21. Állításban és [36]-ban látjuk, hogy $\mathcal{O}(A, \leq_R)$ egy Boole-részhálója $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-nek, emiatt pedig adott $\nu \in [\varphi, \theta]$ esetén létezik olyan $\nu^\star \in \mathcal{O}(A, \leq_R)$ rendezés-kongruencia, hogy

$$\nu \cap \nu^\star = \varphi \qquad \text{és} \qquad \nu \sqcup \nu^\star = \nu \vee \nu^\star = \theta.$$

Emiatt a $[\varphi, \theta]$ intervallum komplementumos, azaz $\mathcal{O}(A)$ relatív komplementumos.

Tegyük fel most azt, hogy $\varphi \prec \theta$ teljesül $\mathcal{O}(A, \leq_r)$-ben. Ekkor θ lefedi φ-t $\mathcal{O}(A, \leq_R)$-ben is, emiatt, ugyanez adódik $\mathrm{Eq}(A)$-ban (lásd az 5.21. Állítást).

Legyen most $\varphi, \theta \in \mathcal{O}(A, \leq_r)$ és $\varphi < \theta$. Mivel $\mathcal{O}(A)$ véges háló, így a φ és θ közötti összes maximális lánc véges. Legyenek

$$\varphi = \mu_0 \prec \mu_1 \prec ... \prec \mu_n = \theta$$

és

$$\varphi = \nu_0 \prec \nu_1 \prec ... \prec \nu_m = \theta$$

ilyen maximális láncok ($m, n \geq 1$). Ekkor az előbbiek szerint ugyanezek maximális láncok Eq(A)-ban. Mivel Eq(A) féligmoduláris háló, így teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, azaz $n = m$. Így tehát $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ is teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt. □

5.26. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz. Ekkor az $\mathcal{O}(A)$ háló atomisztikus és duálisan atomisztikus. Az $\mathcal{O}(A)$ háló valamennyi atomja felírható

$$\nu_{\{a,b\}} = \{a, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\big\}$$

alakban, ahol $a, b \in A$ és vagy $a \prec b$ vagy pedig a és b összehasonlíthatatlan elemek a $\leq_r$ reláció szerint.

Bizonyítás:
Ha az $a, b \in A$ elemekre $a \prec b$ vagy a és b összehasonlíthatatlan elemek a $\leq_r$ reláció szerint, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\nu_{\{a,b\}} = \{a, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\big\} \in \mathcal{O}(A).$$

Mivel $\nu_{\{a,b\}}$ atom Eq(A)-ban, ezért atom az $\mathcal{O}(A)$ hálóban is. Megfordítva, legyen ν egy atom $\mathcal{O}(A)$-ban, azaz $\Delta \prec \nu$ teljesüljön $\mathcal{O}(A)$-ban. Az 5.25. Tétel szerint $\Delta \prec \nu$ adódik Eq(A)-ban, tehát ν atom Eq(A)-ban is. Így ν felírható

$$\nu = \{a, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\big\}$$

alakban, ahol $a, b \in A$ és $a \neq b$. Nyilván $a \prec b$ vagy $b \prec a$ vagy pedig a és b összehasonlíthatatlan elemek az $(A, \leq_r)$-ben. Valóban, ha

$$a <_r x <_r b$$

teljesül, akkor $(b, a) \in \nu$ miatt

$$a, x, b, a$$

ν-kör. Mivel ν rendezés-kongruencia, ezért

$$[a]_\nu = [x]_\nu = [b]_\nu = [a]_\nu,$$

ami ellentmond annak, hogy $x \notin [a]_\nu$.

Mivel minden véges relatív komplementumos hálóban az atomisztikus és duálisan atomisztikus tulajdonságok ekvivalensek, ezért az első állításunkhoz elegendő az atomisztikusságot belátni. Ez viszont Dilworth egy közismert eredményéből adódik, amely szerint minden véges relatív komplementumos háló atomisztikus ([27], [43]). Megjegyezzük, hogy $\rho \in \mathcal{O}(A, \leq_r)$ esetén

$$\rho = \bigsqcup_{\substack{(a,b)\in\rho \text{ és} \\ a\prec b \text{ vagy } a\|b}} \nu_{\{a,b\}}$$

teljesül. □

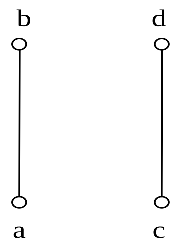
5.27. Definíció.
Egy $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazt intervallum-rendezésnek nevezünk, ha van olyan F függvény, amely minden $x \in A$ elemhez egy nem elfajuló

$$F(x) = [a_x, b_x]$$

zárt intervallumot rendel a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán úgy, hogy $x, y \in A$ esetén

$$x <_r y \quad \Leftrightarrow \quad b_x < a_y \quad \mathbb{R}\text{-ben.}$$

P. C. Fishburn [15]-ben bizonyította, hogy egy részbenrendezett halmaz akkor és csak akkor intervallum-rendezés, ha S_2-t nem tartalmazza.



S_2

5.1. Ábra

Az 5.27. Definíció és Fishburn fenti eredménye alapján bizonyíthatjuk az 5.25. Tétel egy következményét.

5.28. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz.

(1) Ha $\mathcal{O}(A)$ részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak, akkor $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló.

(2) Ha $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló, akkor $(A, \leq_r)$ intervallum-rendezés.

Bizonyítás:

(1) Tegyük fel, hogy $\mathcal{O}(A)$ részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak és legyen $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{O}(A)$ úgy, hogy $\pi_1 \cap \pi_2 \prec \pi_2$ teljesül $\mathcal{O}(A)$-ban. Ekkor az 5.25. Tétel miatt $\pi_1 \cap \pi_2 \prec \pi_2$ teljesül $\mathrm{Eq}(A)$-ban is. Mivel $\mathrm{Eq}(A)$ féligmoduláris háló, és most $\mathcal{O}(A)$ részhálója $\mathrm{Eq}(A)$-nak, ezért

$$\pi_1 \prec \pi_1 \vee \pi_2 = \pi_1 \sqcup \pi_2$$

igaz $\mathrm{Eq}(A)$-ban. Tehát π_1-et $\mathcal{O}(A)$-ban is követi $\pi_1 \sqcup \pi_2$, ennek megfelelően $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló.

(2) Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, ellentétben az állítással, hogy $(A, \leq_r)$ nem intervallum-rendezés. Ekkor $(A, \leq_r)$-nek Fishburn tétele miatt rész-részbenrendezett halmazként tartalmaznia kell S_2-t. Az 5.26. Következmény értelmében $\nu_{\{a,d\}}$ és $\nu_{\{c,b\}}$ atomok $\mathcal{O}(A)$-ban. Mivel $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris, így

$$\nu_{\{a,d\}} \cap \nu_{\{c,b\}} = \Delta$$

és $\Delta \prec \nu_{\{c,b\}}$ miatt

$$\nu_{\{a,d\}} \prec \nu_{\{a,d\}} \sqcup \nu_{\{c,b\}} \tag{5.1}$$

adódik $\mathcal{O}(A)$-ban, amely rákövetkezés $\mathrm{Eq}(A)$-ban is fennáll. Másrészt

$$\rho = \nu_{\{a,d\}} \vee \nu_{\{c,b\}} = \{a, d\} \cup \{c, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b, c, d\}\big\}.$$

Mivel

$$a, b, c, d, a$$

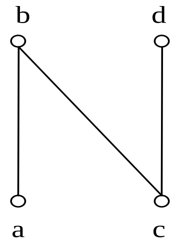
ρ-kör $(A, \leq_r)$-ben úgy, hogy $[a]_\rho \neq [b]_\rho$, ezért $\rho = \nu_{\{a,d\}} \vee \nu_{\{c,b\}}$ nem rendezés-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek. Emiatt azt kapjuk, hogy

$$\nu_{\{a,d\}} < \nu_{\{a,d\}} \vee \nu_{\{c,b\}} < \nu_{\{a,d\}} \sqcup \nu_{\{c,b\}},$$

ami ellentmond (5.1)-nek. □

5.29. Példa.
Megjegyezzük, hogy $(N_2, \leq_r)$ olyan intervallum-rendezés, amelyre $\mathcal{O}(N_2)$ nem részhálója az $\mathrm{Eq}(N_2)$ hálónak. Tekintsük a $\nu_{\{c,b\}}$ és $\nu_{\{a,d\}}$ atomokat $\mathcal{O}(N_2)$-ben. Most

$$\rho^* = \nu_{\{a,d\}} \vee \nu_{\{c,b\}} = \{a, d\} \cup \{c, b\}.$$



N$_2$

5.2. Ábra

Ekkor

$$a, b, c, d, a$$

ρ^*-kör $(N_2, \leq)$-ben úgy, hogy $[a]_{\rho^*} \neq [b]_{\rho^*}$. Emiatt $\nu_{\{a,d\}} \vee \nu_{\{c,b\}}$ nem rendezés-kongruenciája $(N_2, \leq)$-nek. Egyszerűen látható, hogy $\mathcal{O}(N_2)$ nem féligmoduláris háló, tehát az 5.28. Következmény *(2)* részének megfordítása általában nem teljesül.

5.30. Definíció.
Egy 0 *elemes* L *hálót gyengén* 0*-disztributív hálónak nevezünk, ha bármely* $a, b, c \in L$ *különböző atomok esetén* $(a \vee b) \wedge c = 0$.

5.31. Tétel.
Egy véges $(A, \leq_r)$ *részbenrendezett halmazra az alábbiak ekvivalensek.*

(1) $\mathcal{O}(A)$ *gyengén* 0*-disztributív háló.*

(2) $\mathcal{O}(A)$ *Boole-háló.*

(3) $(A, \leq_r)$ *vagy lánc, vagy két elemből álló antilánc.*

Bizonyítás:

(3) $\Rightarrow$ *(2)*. Ha $(A, \leq_r)$ véges lánc, akkor [35] alapján $\mathcal{O}(A)$ Boole-háló. Ha $(A, \leq_r)$ két elemű antilánc, akkor $\mathcal{O}(A) = \{\Delta, \nabla\}$, ezért $\mathcal{O}(A)$ ekkor is Boole-háló.

(2) $\Rightarrow$ *(1)*. Nyilvánvaló.

(1) $\Rightarrow$ *(3)*. Legyen $\mathcal{O}(A)$ gyengén 0-disztributív háló. Ha $|A| \leq 2$, akkor $(A, \leq_r)$ vagy lánc, vagy kételemű antilánc, így *(3)* triviálisan teljesül. Tegyük fel, ellentétben az állítással, $|A| \geq 3$ és $(A, \leq_r)$ nem lánc. Ekkor $(A, \leq_r)$ legalább két nem összehasonlítható elemet tartalmaz. Jelölje ezeket $a, b \in A$, $a \parallel b$. Tekintsünk egy $c \in A \setminus \{a, b\}$ elemet. Ha $\{a, b, c\}$ antilánc lenne, akkor

az 5.26. Következménynek megfelelően $\nu_{\{a,b\}}, \nu_{\{b,c\}}, \nu_{\{a,c\}}$ atomok lennének az $\mathcal{O}(A)$ hálóban úgy, hogy

$$(\nu_{\{a,b\}} \sqcup \nu_{\{b,c\}}) \cap \nu_{\{a,c\}} = \nu_{\{a,c\}} \neq \Delta$$

és így $\mathcal{O}(A)$ nem gyengén 0-disztributív háló. Emiatt c vagy a-val vagy b-vel összehasonlítható. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a < c$. Mivel A véges, ezért van olyan $d \in A$ elem, amelyre

$$a \prec d \leq_r c.$$

Ha b és d összehasonlíthatatlan elemek lennének, akkor $\nu_{\{a,b\}}, \nu_{\{b,d\}}$ és $\nu_{\{a,d\}}$ olyan atomok lennének $\mathcal{O}(A)$-ban, amelyekre

$$(\nu_{\{a,b\}} \sqcup \nu_{\{b,d\}}) \cap \nu_{\{a,d\}} = \nu_{\{a,d\}} \neq \Delta$$

teljesül, amely *(1)*-nek ellentmond. Ezért b és d összehasonlíthatóak. Világos, hogy $b \leq_r d$, egyébként $a \leq_r d$ és $d \leq_r b$ miatt $a \leq_r b$ adódna, ami ellentmondás. Mivel A véges, ezért van olyan $x \in A$ elem, amelyre

$$b \leq_r x \prec d.$$

Ha $x \leq_r a$, akkor $b \leq_r x \leq_r a$ ellentmond annak, hogy $a \parallel b$. Ha $a < x$, akkor $a < x \prec d$ pedig ellentmond annak, hogy $a \prec d$. Tehát a és x összehasonlíthatatlan elemek. Ezért $\nu_{\{a,x\}}, \nu_{\{x,d\}}$ és $\nu_{\{a,d\}}$ olyan atomok az $\mathcal{O}(A)$ hálóban, amelyekre

$$(\nu_{\{a,x\}} \sqcup \nu_{\{x,d\}}) \cap \nu_{\{a,d\}} = \nu_{\{a,d\}} \neq \Delta,$$

ami újra ellentmondás. Emiatt, ha $|A| \geq 3$, akkor $(A, \leq_r)$ lánc. $\square$

Azoknak a rendezés-kongruenciáknak, amelyeknek a faktor-részbenrendezett halmaza lineárisan rendezett, jelentős alkalmazásaik vannak a sorbarendezések elméletében (*Queuing theory*) és az ütemezéselméletben. Az 5.31. Tétel alkalmazásával lehetőségünk nyílik ezen rendezés-kongruenciák jellemzésére.

A [11] dolgozat eredményeit felhasználva az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg:

5.32. Állítás.
Ha $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és φ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, akkor az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\varphi)$ főfiltere izomorf az $\mathcal{O}(A/\varphi, \leq_{r/\varphi})$ hálóval.

5.33. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ *véges részbenrendezett halmaz és* ρ *olyan rendezés-kongruencia* $(A, \leq_r)$*-en, amelyre* $|A/\rho| \geq 3$. *Ekkor az* $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ *faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az* $\mathcal{O}(A)$ *háló* $[\rho)$ *főfiltere Boole-háló.*

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy az $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ faktor-részbenrendezett halmaz lineárisan rendezett. Az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\rho)$ főfiltere izomorf az $\mathcal{O}(A/\rho)$ hálóval, ami most az 5.31. Tétel miatt Boole-háló. Az "akkor" rész bizonyításához tegyük fel, hogy $[\rho)$ Boole-háló. Ekkor az $\mathcal{O}(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ is Boole-háló, így az 5.31. Tétel értelmében $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ vagy lánc, vagy két elemű antilánc. A második esetet $|A/\rho| \geq 3$ kizárja. $\square$

6 Ütemezéselméleti alkalmazások

Az ütemezés feladata egyszerűen megfogalmazható. Ha adott elvégzendő munkák egy M halmaza, akkor ennek egy ütemezésén az M halmaz elemeinek olyan permutációját értjük, amely megadja, hogy az egyes munkákat milyen sorrendben kell végrehajtani. Általános szabály, hogy minden, a munkák elvégzéséhez felhasznált erőforrás (gép) egy időben legfeljebb egy munkán dolgozhat és minden munkát egy időben legfeljebb egy erőforráson (gépen) végezhetünk.

Az operációkutatásban a dekompozíció egy általánosan ismert fogalom, a bonyolultságuk vagy méretük miatt nagyon nehéz problémák egy megoldási módszere. Lényege abban áll, hogy valamilyen rendszert, legyen az egy fizikailag létező vagy egy irányítási rendszer, kisebb részekre bontunk fel, a kisebb részekben felmerülő egyszerűbb vagy könnyebb problémákat oldjuk meg, és a kapott megoldásokat megpróbáljuk összehangolni. Ez irányítási problémák esetén azt jelenti, hogy ellenőrizzük, hogy a részmegoldások együtt az egész feladat egy kielégítő megoldását adják-e. Arra azonban nincs általános szabály, hogy egy feladatot hogyan kell részekre osztani és a részfeladatok megoldásait összehangolni. Egy feladat általában több különböző módon dekomponálható. Bonyolult problémák esetén a mérnöki megközelítés az, hogy a problémát úgy kell egyszerűsíteni, hogy már megoldhatóvá váljon, de eredeti értelmét ne veszítse el. Ehhez a szemlélethez a dekompozíció elve tökéletesen alkalmazkodik. A dekompozíció számos alkalmazása megtalálható az [55] jegyzetben. Példák olvashatóak irányítási problémák dekomponálása, valamint a termelés térben, időben és logikailag történő dekomponálására. Valamennyi esetben a kombinatorikus optimalizálás módszerét alkalmazza a szerző.

A termelés időbeli dekomponálása a termelésirányítás jellegzetes tevékenysége. Azt jelenti, hogy a termelési feladatot időperiódusokra osztjuk fel. Egy rövidebb időperióduson belül vagy továbbosztjuk a termelési feladatot még további részekre, vagy ha már kezelhető méretűvé vált a feladat, akkor ütemezzük azt.

A részbenrendezett halmazoknak számos alkalmazási területe ismert. Ezek egyike az ütemezéselmélet. A termelési illetve gyártási folyamatok egy ismert modelljét úgy kapjuk, hogy egy részbenrendezett halmaz segítségével ábrázoljuk a gyártási folyamat egyes fázisai közötti összefüggéseket. Az ütemezési feladat klasszikus megoldása ekkor egy olyan lineáris rendezés, amely az eredeti részbenrendezés kiterjesztése.

Ha egy termék gyártása során számos technológiai fázis van, akkor a termék általában igen különböző technológiai útvonalakat járhat be. Ha az üzemben az egyes fázisokon párhuzamos berendezések is vannak, akkor a termék által bejárható útvonalak száma meghatványozódhat. Egy lehetséges megoldás, ha a gépeket úgy csoportosítjuk (térbeli és/vagy logikai dekompozíció), hogy azok a termék előállításához szükséges műveletek egy csoportját képesek legyenek elvégezni. Rugalmas gyártó rendszerek esetén az így keletkező kisebb termelőegységeket rugalmas gyártó celláknak (*flexible manufacturing cell*) nevezik.

Ütemezési feladatok megoldásakor tehát lineáris rendezéseket keresünk. Szpilrajn klasszikus tétele értelmében bármely részbenrendezés kiterjeszthető lineárissá ([52]). Vannak azonban a gyakorlatban olyan esetek, amikor nem szükséges az elemek között teljes lineáris rendezést megadni, hanem érdemesebb nagyobb egységeket (csoportokat, blokkokat, tömböket, osztályokat) képezni. Ilyenek például bizonyos csoporttechnológiai feladatok vagy a tantárgyütemezési feladatok. Nyilvánvalóan ekkor olyan osztályozás érdekel bennünket, ahol az osztályok közötti részbenrendezés lineáris. Az osztályok elkészítésekor bizonyos esetekben arra is figyelnünk kell, hogy azok arányos méretűek legyenek.

Adott tehát egy véges elemszámú halmaz, amelyet diszjunkt részhalmazokra (osztályokra) kell felosztani úgy, hogy az osztályok között létrejövő részbenrendezés lineáris legyen, az osztályokon belül pedig egy ekvivalenciareláció érvényesüljön. Lényegében tehát egy véges elemszámú részbenrendezett halmazt osztályozunk úgy, hogy az eredeti részbenrendezés a részhalmazok között egy újabb részbenrendezést indukáljon. Az ilyen felbontások alapján vezettük be a rendezés-kongruencia fogalmát és vizsgáltuk tulajdonságait az 5. fejezetben.

A disszertáció ezen részében az 5. fejezetben megfogalmazott és bizonyított elméleti eredmények ütemezéselméletbeli alkalmazhatóságát vizsgáljuk.

6.1 Egy ütemezési feladat

A termelési illetve gyártási folyamatok esetén az elvégzendő munkák egy véges $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ halmazán az $m_i \leq m_j$ $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$ jelölést vezetjük be, ha az i-edik munka elvégzése időben megelőzi a j-edik munkát. Nyilvánvaló, hogy ekkor $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ha M ütemezését klasszikus értelemben keressük, akkor az nem más, mint $\leq$ egy lineáris kiterjesztése. Több megoldást is kaphatunk, hiszen egy részbenrendezésnek több lineáris kiterjesztése is lehet.

Tegyük fel, hogy egymással párhuzamosan több munka elvégzésére is lehetőségünk van. Ez azt jelenti, hogy M elemeit célszerű diszjunkt részhalmazokra felosztanunk. Alkalmazzuk egy ilyen osztályozásra az

$\{M_1, M_2, ..., M_t\}$ $(t \leq n)$ jelölést. Ekkor

$$M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_t.$$

Lényegében lehetséges gyártási fázisokat hozunk létre, amely jelenthet időbeli dekompozíciót vagy logikai dekompozíciót. A részhalmazok kialakításakor nemcsak azt tartjuk szem előtt, hogy az egyes részhalmazokba egymással szabadon felcserélhető elemek kerüljenek, hanem azt is, hogy a létrehozott tömbök egymással összehasonlíthatóak legyenek, amely lényegét tekintve egy olyan részbenrendezés, amely az eredeti $\leq$ részbenrendezés által indukált lineáris rendezések egyike.

Az eddig megtett lépésekhez könnyen találunk matematikai sémát. Mivel $\{M_1, M_2, ..., M_t\}$ $(t \leq n)$ osztályozása M-nek, így tartozik hozzá egy ρ ekvivalenciareláció. Ennek megfelelően

$$M/\rho = \{M_1, M_2, ..., M_t\},$$

tehát a vizsgált partíció a ρ ekvivalenciareláció faktorhalmaza. Tekintsük továbbá azt a

$$\varphi : M \to M/\rho$$

függvényt, amely az m_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ munkához hozzárendeli azt az M_j $(j \in \{1, 2, ..., t\})$ fázist, amelyben a munka elvégzésre kerül, azaz

$$\varphi(m_i) := M_j, \text{ ha } \quad m_i \in M_j.$$

A rendezés-kongruenciának az 5.1. Definíció *(2)* pontjában megadott fogalmát esetünkben az alábbi megfogalmazásban célszerű használni.

6.1. Definíció.
A ρ ekvivalenciarelációt rendezés-kongruenciának nevezzük az M halmazon, ha az $M/\rho = \{M_1, M_2, ..., M_t\}$ faktorhalmazon értelmezhető olyan $\leq_\rho$ részbenrendezés, amelyre nézve a $\varphi : M \to M/\rho$ függvény rendezésőrző, azaz bármely $m_i \leq m_j$ $(m_i, m_j \in M)$ esetén $\varphi(m_i) \leq_\rho \varphi(m_j)$ teljesül.

A 6.1. Definícióban alkalmazott $\leq_\rho$ jelölésre az indukált részbenrendezés elnevezést használjuk. A fenti definícióból azonnal adódik, hogy ha ρ rendezés-kongruenciája az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaznak, akkor ρ egybeesik a $\varphi : M \to M/\rho$ izoton függvény magjával, tehát

$$\rho = \text{Ker}\varphi.$$

Nyilvánvaló az is, hogy $\varphi(m_i) \leq_\rho \varphi(m_j)$ $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $m_i, m_j \in M$, amelyre $m_i \leq m_j$.

Az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak halmazát - korábbi jelölésünkkel összhangban - jelölje $\mathcal{O}(M)$. Az 5.2 alfejezetben leírtaknak megfelelően az $(\mathcal{O}(M), \subseteq)$ háló relatív komplementumos, atomisztikus és duálisan atomisztikus, továbbá teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt. Az ütemezési feladat megoldásához olyan $\rho \in \mathcal{O}(M)$ kongruenciára van szükségünk, amelyre a kialakított részhalmazok között létrejövő $\leq_\rho$ indukált részbenrendezés lineáris, tehát az $(M/\rho, \leq_\rho)$ faktor-részbenrendezett halmaz lánc.

6.2. Definíció.
Egy $\rho \in \mathcal{O}(M)$ rendezés-kongruenciát az $(M, \leq)$ lineáris rendezés-kongruenciájának nevezünk, ha az $(M/\rho, \leq_\rho)$ faktor-részbenrendezett halmaz lánc.

Az ütemezési feladat megoldása tehát az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz egy lineáris rendezés-kongruenciája lesz. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a megoldást adó lineáris rendezés-kongruenciának még egy további tulajdonsággal is rendelkeznie kell. Ugyanis az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz lineáris rendezés-kongruenciái közül csak olyanra van szükségünk, amely tovább már nem finomítható $\{M_1, M_2, ..., M_t\}$ partíciót eredményez.

6.3. Definíció.
Egy $\rho \in \mathcal{O}(M)$ rendezés-kongruenciát az $(M, \leq)$ minimális lineáris rendezés-kongruenciájának nevezünk, ha $(M, \leq)$-nek nincs olyan $\theta \neq \rho$ lineáris rendezés-kongruenciája, amelyre $\theta \subseteq \rho$.

A kitűzött feladat megoldásaként szóba jöhető rendezés-kongruenciák halmazát tehát tovább szűkítettük. Az ütemezési feladat megoldásához célunk az $(M, \leq)$ minimális lineáris rendezés-kongruenciáinak meghatározása.

Az 5.14. Következmény értelmében, ha a $\rho \subseteq M \times M$ ekvivalencia-reláció az (M, R) részbenrendezett halmaz intervallum-kongruenciája, akkor ρ rendezés-kongruenciája is (M, R)-nek. Ha R a $\leq$ részbenrendezés lineáris kiterjesztése, akkor az 5.2. Megjegyzés miatt ρ $(M, \leq)$-nek is rendezés-kongruenciája, azaz $(M, \leq)$ rendezés-kongruenciáinak keresése visszavezethető az eredeti részbenrendezés valamely lineáris kiterjesztésének intervallumokra történő feldarabolására.

Az ütemezési feladat klasszikus megoldásához tehát az első lépést az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén a $\leq$ reláció lineáris kiterjesztéseinek meghatározása jelentheti. Erre az irodalomban több kész megoldás is olvasható ([54]). Ezek egyike Trotter-től származik.

6.2 A Trotter-féle mohó algoritmus

Megoldásunk első lépésével kapcsolatos legfőbb probléma az, hogy egy részbenrendezett halmaz lineáris kiterjesztéseinek a száma az alaphalmaz elemszámának függvényében exponenciálisan nő. Ennek a problémának a leküzdésére használjuk a Trotter-féle mohó algoritmust. Jelöljük n-nel az X halmaz elemszámát.

6.4. Algoritmus.

Proc Trotter   A futási idő: $\Theta(n)$.
Input: X halmaz
     P halmaz (részbenrendezés)
Output: L vektor (lánc)
$X_0 \leftarrow X$
$P_0 \leftarrow P$
$\mathbf{P_0} \leftarrow (X_0, P_0)$
$G_0 \leftarrow (S_0 \leftarrow$ $\min(\mathbf{P_0})$ tetszőleges eleme)
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
   if $i > 0$ **then** $S_i' = \{x \in S_i \mid x_i < x$ P-ben$\}$
     if $S_i' = \varnothing$ **then** $G_i = S_i$
     if $S_i' \neq \varnothing$ **then** $G_i = S_i'$
   $x_{i+1} \leftarrow$ a G_i egy tetszőleges eleme
   $L[i+1] \leftarrow x_{i+1}$
   $X_{i+1} \leftarrow X_i \setminus \{x_{i+1}\}$
   $P_{i+1} \leftarrow P(X_{i+1})$
   $\mathbf{P}_{i+1} \leftarrow (X_{i+1}, P_{i+1})$
   $S_{i+1} \leftarrow \min(\mathbf{P_{i+1}})$
RETURN

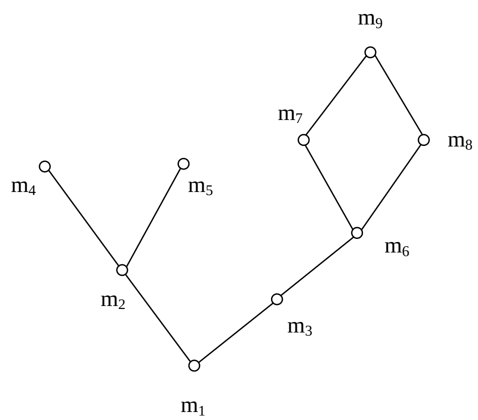
A mohó algoritmus az $(X, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén a $\leq$ reláció lineáris kiterjesztését úgy állítja elő, hogy először X minimális elemei közül választ egyet. Ha a lánc első $x_1, ..., x_i$ tagja már megvan, akkor az $i + 1$-edik elemet az

$$(X \setminus \{x_1, ..., x_i\}, \leq)$$

részbenrendezett halmaz minimális elemeinek halmazából választja a mohó feltétel szerint. Ez azt jelenti, hogy $i > 0$ esetén nem tetszőlegesen választ a minimális elemek közül, hanem azokra a minimális elemekre szűkít, amelyek az előző lépésben kiválasztott elemmel összehasonlíthatóak, amennyiben van ilyen elem.

Az algoritmus működésének szemléltetésére tekintsük az alábbi példát.

6.5. Példa.
Legyen $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$. Az $(M, \leq)$ részbenrendezett halmazt Hasse-diagramjával szemléltetjük.



6.1. Ábra

Ekkor

$$L_1 : [m_1, m_3, m_6, m_7, m_2, m_4, m_5, m_8, m_9]$$

és

$$L_2 : [m_1, m_2, m_4, m_5, m_3, m_6, m_7, m_8, m_9]$$

olyan lineáris kiterjesztései $\leq$-nek, amelyeket a 6.4. Algoritmus eredményezhet. Könnyen látható, hogy

$$L_3 : [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9]$$

szintén lineáris kiterjesztése $\leq$-nek, azonban ezt a láncot a mohó algoritmus nem állítja elő. Ekkor ugyanis $x_1 = m_1$ és $x_2 = m_2$, így $S_2 = \{m_4, m_5, m_3\}$ és $G_2 = \{m_4, m_5\}$. Azaz x_3-nak a mohó algoritmus nem választhatja m_3-at, mert $m_3 \notin G_2$.

6.3 Az ütemezési feladat megoldása

Jól látható, hogy klasszikus értelemben, azaz amikor egy időben csak egy gép dolgozik (tehát nincs lehetőség párhuzamos munkák végzésére) az ütemezési feladatnak a Trotter-féle mohó algoritmus eredményeként kapott lineáris kiterjesztés minden esetben egy megoldását adja. A minimális lineáris rendezés-kongruenciák meghatározásával azt az alternatív ütemezési feladatot fogjuk megoldani, amikor megengedjük, hogy egy időben több gép is dolgozzon. Lényegében logikai dekompozíciót végzünk, amelynek eredményeként azt várjuk, hogy a gyártási (futási) idő csökkenjen.

Az ütemezési feladatot reprezentáló $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén az 5.14. Következmény és az 5.2. Megjegyzés alkalmazásához szükséges lineáris kiterjesztést a Trotter-féle mohó algoritmus szolgáltatja. Ha tekintjük az

$$L : x_1, ..., x_n \qquad (x_i = m_j, \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\})$$

láncot (ahol L a $\leq$ kiterjesztése), akkor az 5.14. Következmény és az 5.2. Megjegyzés értelmében elő kell állítanunk az

$$M_1 = [x_1, x_{i_1}], \quad M_2 = [x_{i_1+1}, x_{i_2}], \quad ... \quad M_t = [x_{i_{t-1}+1}, x_n]$$

intervallumokat. Az így kialakított partíció az M halmaz rendezés-kongruenciája. Lineáris rendezés-kongruenciát a 6.2. Definíció értelmében akkor kapunk, ha az

$$\{M_1, M_2, ..., M_t\}$$

halmazon indukált részbenrendezés lineáris. Ez akkor következik be, ha bármely két egymást követő M_j, M_{j+1} $(j \in \{1, ..., t-1\})$ intervallum esetén léteznek olyan $x_k \in M_j$ és $x_l \in M_{j+1}$ $(1 \leq k < l \leq n)$ elemek, amelyekre

$$x_k \leq x_l$$

teljesül. Ahhoz, hogy minimális lineáris rendezés-kongruenciát állítsunk elő elégséges, ha a kialakított

$$M_1, M_2, ...M_t$$

intervallumok $(M, \leq)$-ben antiláncok és bármely két szomszédos M_j, M_{j+1} $(j \in \{1, ..., t-1\})$ intervallum esetén legyenek olyan $x_k \in M_j$ és $x_l \in M_{j+1}$ $(1 \leq k < l \leq n)$ elemek, amelyekre

$$x_k \prec x_l.$$

Ha a Trotter-féle mohó algoritmust kiegészítjük a fenti észrevételeinkkel, akkor az ütemezési feladat megoldását minimális lineáris rendezés-kongruencia formájában kapjuk meg. Jelöljük n-nel az L vektor hosszát.

6.6. Algoritmus.

Proc Minimális lineáris rendezés-kongruencia   A futási idő: $\Theta(n)$.
Input: X halmaz
P halmaz (részbenrendezés)
L vektor (Trotter-féle mohó algoritmusból)
Output: $\mathcal{A}$ (minimális lineáris kongruencia)
$X_1 \leftarrow X$
$P_1 \leftarrow P$
$\mathbf{P_1} \leftarrow (X_1, P_1)$
$A_1 \leftarrow \{L[1]\}$
$\mathcal{A} \leftarrow A_1$
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  if $(L[i], L[i+1]) \in \mathbf{P_i}$
    then $A_{i+1} \leftarrow \{L[i+1]\}$
  if $(L[i], L[i+1]) \notin \mathbf{P_i}$
    then $A_{i+1} \leftarrow A_i \cup \{L[i+1]\}$
  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{A_{i+1}\}$
  if $A_i \subseteq A_{i+1}$ **and** $A_i \neq A_{i+1}$
    then az $\mathcal{A}$ halmazból $\{A_i\}$ törlése
  $X_{i+1} \leftarrow X_i \setminus \{L[i]\}$
  $P_{i+1} \leftarrow P(X_{i+1})$
  $\mathbf{P}_{i+1} \leftarrow (X_{i+1}, P_{i+1})$
RETURN

A 6.6. Algoritmus az $(X, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén egy ekvivalencia osztályaival megadott minimális lineáris rendezés-kongruenciát úgy állít elő, hogy a bemenetként kapott L lánc első eleméből kialakít egy osztályt. Most $L[i]$ jelöli az L lánc i-edik elemét. Ha $i \geq 1$, akkor az algoritmus megvizsgálja, hogy a lánc i-edik és $i+1$-edik eleme között fennáll-e a $\leq$ reláció. Ha $L[i] \leq L[i+1]$, akkor új osztályt hoz létre, amely az $L[i+1]$ elemet tartalmazza. Ha $L[i] \nleq L[i+1]$, akkor az új osztályt úgy alakítja ki, hogy az előző lépésben létrehozott osztályt bővíti az $L[i+1]$ elemmel. Ha az előző lépésben létrehozott osztály valódi részhalmaza az i-edik lépésben megalkotott halmaznak, akkor azt töröljük, hiszen annak elemeit az új osztály tartalmazza. Könnyen látható, hogy az egy osztályba kerülő elemek antiláncot képeznek az $(X, \leq)$ részbenrendezett halmazban, továbbá bármely két egymás után kialakított (és nem törölt) osztály (intervallum) esetén találunk olyan elemeket, amelyekre a megkövetelt rákövetkezési tulajdonság teljesül.

Sikerült tehát a kitűzött ütemezési feladatunkhoz olyan megoldást találni, amelynek segítségével az egyes elvégzendő munkák olyan logikai dekompozíciója végezhető el, amely csökkenti a teljes munka elvégzéséhez szükséges időt, azáltal, hogy lehetővé válik bizonyos munkafázisok során a párhuzamos munkavégzés.

6.7. Példa.

Ha a 6.5. Példában megadott L_1 lineáris kiterjesztést tekintjük, akkor a 6.6. Algoritmus az alábbi minimális lineáris rendezés-kongruenciát eredményezi:

$$\big\{\{m_1\}, \{m_3\}, \{m_6\}, \{m_7, m_2\}, \{m_4, m_5, m_8\}, \{m_9\}\big\}.$$

Az L_2 lánc esetén pedig a

$$\big\{\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_4, m_5, m_3\}, \{m_6\}, \{m_7, m_8\}, \{m_9\}\big\}$$

megoldást kapjuk. Látható, hogy az elvégzendő munkát hat fázisra bontottuk mindkét esetben. Az is jól látható, hogy ebben az esetben a minimális lineáris rendezés-kongruencia alapján elvégzett logikai dekompozíció kilenc időegységről hat időegységre csökkenti az előállítási (futási) időt, amennyiben feltételezzük, hogy minden elvégzendő munka ugyanakkora időigénnyel bír.

Az is könnyen észrevehető, hogy ha a 6.6. Algoritmus bemeneteként megadott láncot nem a Trotter-féle mohó algoritmus eredményezi, akkor a minimális lineáris rendezés-kongruenciára megadott feltételek általában nem teljesülnek a kialakított ekvivalencia-osztályokra.

6.8. Példa.
Tekintsük a 6.5. Példában megadott L_3 lineáris kiterjesztést. Ekkor a 6.6. Algoritmus az alábbi osztályozást eredményezi:

$$\big\{\{m_1\},\{m_2,m_3,m_4,m_5,m_6\},\{m_7,m_8\},\{m_9\}\big\}.$$

Ekkor azonban az $\{m_2,m_3,m_4,m_5,m_6\}$ osztály elemei nem képeznek antiláncot, mert

$$m_2 \leq m_4, \qquad m_2 \leq m_5, \qquad m_3 \leq m_6.$$

Az ütemezési feladatnak az így elkészített osztályozás nyilvánvalóan nem megoldása.

6.9. Megjegyzés.
Az $(M,\leq)$ részbenrendezett halmaz lineáris rendezés-kongruenciáinak keresésére az 5.33. Következmény is lehetőséget biztosít. Ha ρ rendezés-kongruencia az $(M,\leq)$ részbenrendezett halmazon, akkor az 5.33. Következmény értelmében az $(M/\rho,\leq_\rho)$ faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az $\mathcal{O}(M)$ háló $[\rho)$ főfiltere Boole-háló. ρ tehát pontosan akkor lineáris rendezés-kongruencia az $(M,\leq)$ részbenrendezett halmazon, ha az általa generált $[\rho)$ főfilter Boole-háló.

7 Új tudományos eredmények

7.1 Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek jellemzése

Szpilrajn tétele ([52]) szerint az A halmaz bármely $\leq_r$ részbenrendezése kiterjeszthető lineáris rendezéssé az A halmazon. Következésképpen a maximális (tovább már nem bővíthető) részbenrendezések (az adott relációra nézve) az A halmazon éppen az A halmaz lineáris rendezései. Ezt a klasszikus eredményt általánosította Szigeti Jenő és Nagy Bertalan [48] cikkükben, amelyben igazolták, hogy ha $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és $f : A \rightarrow A$ ciklusmentes rendezés endomorfizmus, amely kompatibilis a $\leq_r$ relációra nézve, akkor r kiterjeszthető lineárissá úgy, hogy a R lineáris kiterjesztés szintén kompatibilis tulajdonságú. Ennek az eredménynek egy általánosítása Földes István és Szigeti Jenő [20] dolgozatában olvasható. A szerzők igazolták, hogy az (A, f) unáris algebra minden kompatibilis részbenrendezése kiterjeszthető úgynevezett f-kvázilineáris részbenrendezéssé. Megmutatták, hogy a maximális kompatibilis részbenrendezések (adott relációra nézve) valójában a kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezések az (A, f) unáris algebrán. Ezen eredmények felhasználásával megadom az r részbenrendezés maximális kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén, azaz olyan részbenrendezett mono-unáris algebrákra, amelyekre az f függvény nem feltétlenül ciklusmentes. A 3.3. Tétel alapján az alábbi tézist állítom fel:

1. tézis:

Teljes jellemzést megadó tételt fogalmaztam meg és igazoltam az r részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris kiterjesztéseiről, azaz maximális kompatibilis kiterjesztéseiről, tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett mono-unáris algebra esetén, az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas r^* részbenrendezésének kompatibilis lineáris kiterjesztéseinek felhasználásával.

A 3.3. Tételből a [48] és a [20] dolgozatok korábbi eredményei speciális esetekként kaphatóak meg.

7.2 Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszete

Szigeti [49] dolgozatában leírja adott ciklusmentes $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés valamennyi kompatibilis kiterjesztésének metszetét. Az 1. tézis alapjául szolgáló 3.3. Tétel lehetővé teszi, hogy általánosítsuk [49] eredményeit azokra az $(A, f, \leq_r)$ hármasokra, amelyekre az $f : A \to A$ függvény nem feltétlenül ciklusmentes. A metszetet megadó tétel megalkotásához, [48] megfelelő definíciói alapján, bevezettem az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebrában a $\uparrow$-definit elem, $\downarrow$-definit elem és indefinit elem fogalmakat (nevezetes elemek). Megmutattam, hogy tetszőleges $a \in A$ elemre a három definíció közül pontosan egy teljesül. A nevezetes elemek felhasználásával az $M_\uparrow$, $M_\downarrow$ és M halmazok ugyanúgy definiálhatóak, mint [49]-ben. Az így létrehozott halmazok és az f-tiltott pár fogalmának felhasználásával megadtam tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetét (3.10. Tétel).

2. tézis:

Megfogalmaztam és bizonyítottam, az 1. tézis felhasználásával, tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett mono-unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetét leíró tételt.

Az 1. és a 2. tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 3. fejezete és az [SZ8] publikáció tartalmazza.

7.3 Az elméleti eredmények alkalmazása

Két alkalmazást mutatunk be a disszertáció 4. fejezetében a 2. tézis eredményeinek szemléltetésére. Az első esetben ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra esetén adtunk meg egy speciális kompatibilis részbenrendezést, amelynek lezártját is meghatároztuk.

3. tézis:

Az (A, f) ciklusmentes mono-unáris algebra esetén értelmeztem az $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezést, amelynek $(\hat{f})_f$ lezártjáról (amely a 2. tézisben említett metszet) teljes leírást adtam.

A 3. tézis alapját jelentő 4.7. Tételt és az $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezés lezártjának leírásához felhasznált állításokat bizonyításukkal együtt a 4.1. alfejezet és az [SZ10] cikk tartalmazza.

A második bemutatott alkalmazásban nem követeljük meg az f függvény ciklusmentességét, így a megadott részbenrendezés esetén a lezárt néhány elemének meghatározásához felhasználjuk a metszet pontos leírását kimondó 2. tézist. A matematikai háttér pontos kidolgozása után a felhasznált fogalmak és a bizonyított eredmények szemléltetésére olyan példát alkottunk meg, amely megfelelő megszorításokkal végessé tehető. A 4.2. alfejezet egy konkrét ciklikus részbenrendezett unáris algebrát mutat be. Ez a példa az [SZ8] cikkben olvasható. Itt a metszet leírásához szükséges halmazok közül csak az $M_{\uparrow}$-t határozzuk meg, ugyanis az $M_{\downarrow}$ és M halmazok teljes leírása számos aleset vizsgálatával járó hosszú, nagy számolásigényű feladat. Ezért a $\mathbf{cl}(A, f, \leq_d)$ metszet (lezárt) teljes leírásához számítógépes programot készítettem a 3.10. Tétel algoritmizálhatóságára alapozva. Hét olyan algoritmust dolgoztam ki, amelyek a program alapjául szolgáltak. A megadott algoritmusok szorosan kapcsolódnak a kitűzött konkrét feladathoz, azonban általánosíthatóságuk, és ezáltal más környezetben történő alkalmazásuk általában könnyen megvalósítható. Az algoritmusok pszeudokódjait a 4.2 alfejezet mellett az [SZ9] dolgozat tartalmazza.

7.4 Részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáiról

Részbenrendezett halmaz esetén két viszonylag új kongruencia fogalmat vizsgáltam (rendezés- és intervallum-kongruencia). A részbenrendezett halmaz fent említett kongruenciáinak fontosabb tulajdonságait tanulmányoztam, feltártam a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és intervallum-kongruenciái közötti kapcsolatokat, valamint a lineáris kiterjesztésekkel kapcsolatos momentumokat. Az 5.8. Tétel, az 5.13. Tétel és az 5.14. Következmény alapján az alábbi tézist állítom fel:

4. tézis:

Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg és bizonyítottam az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáira, valamint intervallum-kongruenciáira. Megmutattam továbbá, hogy az $(A, \leq_r)$ valamennyi intervallum-kongruenciája egyben rendezés-kongruenciája is az adott $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaznak.

Az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak teljes hálójára és intervallum-kongruenciáinak teljes féligmoduláris hálójára megmutattam, hogy e két háló megegyezik, ha a $\leq_r$ részbenrendezés lineáris. Emellett számos további érdekes tulajdonságot sikerült bizonyítani.

5. tézis:

Véges részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak hálójára igazoltam, hogy olyan relatív komplementumos háló, amely annak ellenére teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, hogy maga a háló általában nem féligmoduláris. Azt is megmutattam, hogy ez a háló atomisztikus és duálisan atomisztikus, valamint akkor és csak akkor gyengén 0-disztributív, ha $(A, \leq_r)$ lánc vagy két elemből álló antilánc.

Az 5. tézis alapjául az 5.25. Tétel, az 5.26. Következmény és az 5.31. Tétel szolgál. Azt is bizonyítottam, hogy ha $\mathcal{O}(A)$ részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak, akkor $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló. Ha pedig $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló, akkor $(A, \leq_r)$ intervallum-rendezés. Azoknak a rendezés-kongruenciáknak, amelyeknek a faktor-részbenrendezett halmaza lineárisan rendezett jelentős alkalmazásaik vannak az ütemezéselméletben. Igazoltam, hogy ha $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz és ρ olyan rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, amelyre $|A/\rho| \geq 3$, akkor az $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\rho)$ főfiltere Boole-háló.

A 4. és 5. tézis eredményeinek gyakorlati alkalmazhatóságát az ütemezéselmélet területén vizsgáltam. A Trotter-féle mohó algoritmust kiegészítettem egy olyan algoritmussal, amely adott véges $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén megkeres egy minimális lineáris rendezés-kongruenciát, amely az $(M, \leq)$-vel megadott ütemezési feladatra olyan megoldást ad, amely optimális párhuzamos munkavégzések segítségével (logikai dekompozíció) le tudja rövidíteni a munka elvégzéséhez szükséges időt (amennyiben lehetőség van párhuzamos munkavégzésre).

8 TOVÁBBI KUTATÁSI FELADATOK

Kutatásaink folytatására több lehetőség is kínálkozik. Természetes módon adódik az a lehetőség, hogy egy (A, F, r) részbenrendezett algebra esetén egy helyett két rendezéstartó függvényt tekintsünk. Ekkor tehát $F = \{f, g\}$, ahol f és g is rendelkezik a (2.1)-beli kompatibilitási tulajdonsággal. Kutatási célunk lehet annak felderítése, hogy mikor létezik mindkét függvény rendezéstartó tulajdonságát megőrző lineáris kiterjesztés. Ez a vizsgálat nem ígérkezik könnyűnek. A kiterjeszthetőség nyilvánvaló szükséges feltétele az, hogy minden

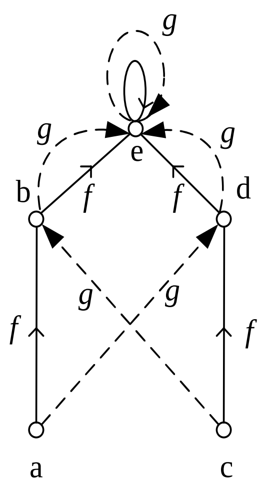
$$f^{k_1} \circ g^{l_1} \circ f^{k_2} \circ g^{l_2} \circ ... \circ f^{k_r} \circ g^{l_r} \quad (k_i, l_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., r\})$$

alakú összetett függvény ciklusmentes. Ez a feltétel sajnos nem elégséges. Könnyebbnek tűnik az az eset, amikor

$$f \circ g = g \circ f,$$

de a választ még ebben a speciális esetben sem ismerjük. A probléma nehézségére az alábbi példa is rávilágít.

8.1. Példa.
Tekintsük az $(A, F, \leq_r)$ részbenrendezett algebrát, ahol $A = \{a, b, c, d, e\}$ és $F = \{f, g\}$. Az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramjában az $f : A \to A$ és a $g : A \to A$ függvény hatását nyilak szemléltetik. Könnyen



8.1. Ábra

látható, hogy ekkor $f \circ g = g \circ f$ és valamennyi fenti kompozíció ciklusmentes, ennek ellenére nincs olyan lineáris kiterjesztése $\leq_r$-nek, amely megőrizné mindkét függvény rendezésőrző tulajdonságát.

Ha $(A, f, \leq_r)$ egy olyan rendezett hármas, amelyben $f : A \to A$ egy $\leq_r$ szerint (antimonoton) rendezés fordító függvény, akkor természetes módon felmerül az a kérdés is, hogy melyek lesznek $\leq_r$-nek az f fenti tulajdonságát megőrző maximális (azaz tovább már nem bővíthető) kiterjesztései. Csak abban az esetben ismerjük a választ, amikor f-nek legfeljebb egy fixpontja van és $f \circ f$-nek nincs valódi ciklusa ([34]), ilyenkor van $\leq_r$-nek lineáris kiterjesztése a fenti tulajdonsággal. Nyilvánvaló, hogy egy lineáris rendezés már nem bővíthető, azaz maximális. A fent említett tulajdonságú maximális kiterjesztések metszete is érdeklődésünkre tarthat számot. Kutatási terveink között szerepel továbbá egy olyan tétel megalkotása, amely egy részbenrendezés $\leq_r$-antimonotonitást őrző lineáris kiterjesztéseinek metszetét teljesen leírja. A 3.11. Következményben megfogalmazott eredmény jó kiindulási alapot jelenthet a további vizsgálatokhoz.

A 4. fejezet második példájára épülő program továbbfejlesztése is terveink között szerepel. Az alapfeladat általánosításával elérhető például olyan helyzet, hogy az egyes f-komponensek különböző hosszúságú ciklusokat tartalmazzanak. Annak a lehetősége is fennáll, hogy az eddigi oszthatósági reláció helyére más részbenrendezést adjunk meg. A legkézenfekvőbb lehetőség az lenne, hogy az alaphalmaz létrehozásához felhasznált prímelemek kitevőjét növeljük. Ez azonban a számítási műveletek olyan nagymértékű megnövekedésével jár, amely kifejezetten nagy teljesítményű gépi hátteret igényel. Ebbe az irányba már tettünk kezdeti lépéseket.

A 6. fejezetben bemutatott algoritmusok alapján olyan program megírását célozhatjuk meg, amely adott véges $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén az összes lehetséges minimális lineáris rendezés-kongruenciát előállítja, tehát az ütemezési feladat összes olyan megoldását megkeresi, amely alapján logikai dekompozíció végezhető el. Számos olyan eset lehetséges, amikor nem áll rendelkezésre korlátlan mennyiségű gép a párhuzamos munkavégzésre, azaz korlátozzuk az osztályok elemszámát. Elemezhetnénk tehát a megoldásokat bizonyos korlátozó feltételek mellett (pl. gépek száma, megmunkálási idő). Amennyiben az egyes elvégzendő munkák esetén a megmunkálási (végrehajtási) idő is ismert, úgy vizsgálhatnánk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a megadott korlátozás mellett a teljes munkaidő minimális legyen (határidős munkák).

9 Összefoglalás

A disszertáció a részbenrendezett mono-unáris algebrák elméletéhez kapcsolódik. Ha $f : A \to A$ olyan egyváltozós művelet amely ciklusmentes, akkor az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett mono-unáris algebra esetén a kompatibilis (rendezéstartást megőrző) lineáris kiterjesztés létezésének szükséges és elégséges feltételét a [48] cikkben találjuk. Ezen kompatibilis kiterjesztések metszetének leírása a [49] dolgozatban olvasható. A [20] cikk figyelemre méltó eredménye annak a ténynek az igazolása, hogy az (A, f) unáris algebra minden kompatibilis részbenrendezése kiterjeszthető úgynevezett f-kvázilineáris részbenrendezéssé. Ezen eredmények felhasználásával az értekezés első részében megadom az r részbenrendezés maximális kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén, azaz általánosítom a korábbi eredményeket azokra az $(A, f, \leq_r)$ hármasokra, amelyekre az f függvény nem feltétlenül ciklusmentes. Továbbá ezen leírás segítségével megadom az r részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetét. Az eredmények szemléltetésére két alkalmazást mutatok be. Az első alkalmazásban ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra esetén adok meg egy speciális kompatibilis részbenrendezést, amelynek lezártját is meghatározom. A második példában nem követelem meg az f függvény ciklusmentességét, így a megadott részbenrendezés esetén a lezárt néhány elemének meghatározásához felhasználom a metszet pontos leírását kimondó tételt. Az említett tétel algoritmizálhatóságát kihasználva a metszet valamennyi elemének meghatározására algoritmusokat dolgoztam ki és programot készítettem a Maple programcsomaggal.

Részbenrendezett halmaz esetén két viszonylag új kongruencia fogalmat vizsgáltam. A részbenrendezett halmaz rendezés- és intervallum-kongruenciáinak fontosabb tulajdonságait tanulmányoztam, feltártam a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és intervallum-kongruenciái közötti kapcsolatokat, valamint a lineáris kiterjesztésekkel kapcsolatos momentumokat. Az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak teljes hálójára és intervallum-kongruenciáinak teljes féligmoduláris hálójára megmutattam, hogy e két háló megegyezik, ha a $\leq_r$ részbenrendezés lineáris. Véges részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak hálójára igazoltam, hogy olyan relatív komplementumos háló, amely annak ellenére teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, hogy maga a háló általában nem féligmoduláris. Azt is megmutattam, hogy ez a háló atomisztikus és duálisan atomisztikus, valamint akkor és csak akkor gyengén 0-disztributív, ha $(A, \leq_r)$ lánc vagy két elemből álló antilánc. Azt is bizonyítottam, hogy ha $\mathcal{O}(A)$

részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak, akkor $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló. Ha pedig $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló, akkor $(A, \leq_r)$ intervallum-rendezés. Igazoltam továbbá, hogy ha $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz és ρ olyan rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, amelyre $|A/\rho| \geq 3$, akkor az $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\rho)$ főfiltere Boole-háló.

Az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát az ütemezéselmélet területén vizsgáltam. A Trotter-féle mohó algoritmust kiegészítettem egy olyan algoritmussal, amely adott véges $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén megkeres egy minimális lineáris rendezés-kongruenciát, amely az $(M, \leq)$-vel megadott ütemezési feladatra olyan megoldást ad, amely optimális párhuzamos munkavégzések segítségével (logikai dekompozíció) le tudja rövidíteni a munka elvégzéséhez szükséges időt (amennyiben erre lehetőség van).

10 Summary

This PhD dissertation contains new results about partially ordered mono-unary algebras. The first section is the introduction and in this section we formulate the aims of our research. In section 2 we provide the necessary prerequisites.

In the third section of our dissertation we deal with the intersection of maximal compatible partial orders. We present a characterization of the maximal compatible extensions of a given compatible partial order $\leq_r$ on a unary algebra (A, f). These extensions can be constructed by using the compatible linear extensions of $\leq_{r^*}$, where (A^*, f^*) is the so called contracted quotient algebra of (A, f) and the compatible partial order $\leq_{r^*}$ on (A^*, f^*) is naturally induced by $\leq_r$. We prove the following theorem:

10.1. Theorem. *If $(A, f, \leq_r)$ is a partially ordered unary algebra and R is a compatible partial order extension of r, then the following are equivalent.*

1. $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$.
2. $R = \lambda(L)$ *for some* $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$.

Using this characterization and applying the results of [20] and [49], we determine the intersection of the maximal compatible extensions of $\leq_r$.

10.2. Theorem. *If $(A, f, \leq_r)$ is a partially ordered unary algebra, then*

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = (M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P.$$

All of the earlier results in [20], [48] and [49] about compatible extensions will appear as paticular cases of our Theorems 10.1 and 10.2.

In section 4 we present two applications of our theoretical results. In our first application we give a special compatible partial order for an acyclic partially ordered mono-unary algebra and provide a complete description of the intersection of the compatible linear extensions of the given partial order.

10.3. Theorem. *If (A, f) acyclic unary algebra, then $\hat{f}$ is a compatible partial order on A and for $x, y \in A$ we have*

$$(x, y) \in (\hat{f})_f \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \text{ or } \langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \varnothing \text{ and } \delta(x, x\triangle y) < \delta(y, x\triangle y).$$

In our second application we illustrate our definitions and results on a concrete example.

In the next section we deal with two relatively new notions. For order-congruences and interval-congruences we prove the following theorems.

10.4. Theorem. *Let $(A, \leq_r)$ be a poset and $\rho \subseteq A \times A$ an equivalence relation on A. Then the following are equivalent.*

(1) ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_r)$.

(2) $\overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1} = \rho$.

(3) $(r \vee \rho) \cap (r^{-1} \vee \rho) = \rho$ *holds in the lattice Quord*(A) .

(4) There exists a quasiorder $\theta \subseteq A \times A$ *such that* $r \subseteq \theta$ *and* $\theta \cap \theta^{-1} = \rho$.

(5) There exists a linear extension $r \subseteq R$ *such that* ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_R)$.

10.5. Theorem. *Let $(A, \leq_r)$ be a poset and $\rho \subseteq A \times A$ an equivalence relation on A. Then the following are equivalent.*

(1) ρ *is an interval-congruence of* $(A, \leq_r)$.

(2) $\rho \cup r$ *is transitive.*

(3) ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_r)$ *and we have* $\kappa^{-1}(r/\rho) = r$ *for the canonical map* $\kappa : A \to A/\rho$ *and for the pre-image*

$$\kappa^{-1}(r/\rho) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ or } \kappa(x) <_{r/\rho} \kappa(y)\}$$

of the induced partial order $\leq_{r/\rho}$.

(4) We can find linear extensions $r \subseteq R_i$, $i \in I$ *such that* $r = \bigcap_{i \in I} R_i$ *and* ρ *is an order- ($\Leftrightarrow$ interval) congruence of* $(A, \leq_{R_i})$ *for all* $i \in I$.

10.6. Corollary. *If $\rho \subseteq A \times A$ is an interval-congruence of $(A, \leq_r)$ then ρ is an order-congruence of $(A, \leq_r)$.*

10.7. Theorem. *Let $(A, \leq_r)$ be a finite poset. Then the lattice $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ satisfies the Jordan-Hölder (chain) condition. This lattice is atomistic and dually atomistic. Moreover $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ is weakly 0-distributive if and only if $(A, \leq_r)$ is either a chain or a two-element antichain.*

In section 7 we show an application in connection with the theory of scheduling. Based on the results of section 6, we exhibit and implement an algorithm for determining minimal linear order-congruences, solving the given scheduling problem.

Az értekezés témakörében készített saját publikációk

[SZ1] SZILÁGYI, SZ.: *Részbenrendezések alkalmazása az ütemezéselméletben*, Doktoranduszok Fóruma (szekciókiadvány), Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003, pp. 257-262.

[SZ2] KÖRTESI, P., RADELECZKI, S., SZILÁGYI, SZ.: *An application of partial orders,* microCAD 2004, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2004, pp. 65-69.

[SZ3] SZILÁGYI, SZ.: *Kongruenciák és izoton függvények részbenrendezett halmazokon*, Doktoranduszok Fóruma (szekciókiadvány), Miskolci Egyetem, Miskolc, 2004, pp. 279-284.

[SZ4] SZILÁGYI, SZ.: *On Maximal Linear Extensions of Partial Orders*, microCAD 2005, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2005, pp. 155-159.

[SZ5] KÖRTESI, P., RADELECZKI, S., SZILÁGYI, SZ.: *Congruences and isotone maps on partially ordered sets,* Mathematica Pannonica **16/1** (2005), 39-55.

[SZ6] SZILÁGYI, SZ.: *Compatible partial orders in unary algebras*, "European Integration - Between Tradition and Modernity" Conference, Targu-Mures, 2005, pp. 723-727.

[SZ7] SZILÁGYI, SZ.: *The intersection of the compatible quasilinear extensions of a partial order,* microCAD 2008, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2008, pp. 73-78.

[SZ8] SZILÁGYI, SZ.: *A characterization and the intersection of the maximal compatible extensions of a partial order,* Order **25/4** (2008), 321-333.

[SZ9] SZILÁGYI, SZ.: *A numerical example for the intersection of the compatible quasilinear extensions of a partial order*, Manuscript

[SZ10] SZIGETI, J., SZILÁGYI, SZ.: *The partial order induced by an acyclic function*, Manuscript

Irodalomjegyzék

[1] BLAZEWICZ, J., ECKER, K. H., PESCH, E., SCHMIDT, G., WEGLARZ, J.: *Scheduling computer and manufactoring processes*, Springer, 1996.

[2] BLOOM, S. L.: *Varietes of ordered algebras*, J. Comput. System Sci. **13** (1976), 200-212.

[3] BONNET, R., POUZET, M.: *Linear extensions of ordered sets*, Ordered Sets, Proceedings of the Nato Advanced Study Institute Conference, Banff, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston (1982), pp. 125-170.

[4] BURRIS, S., SANKAPPANAVAR, H. P.: *Bevezetés az univerzális algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[5] CHAJDA, I., SNÁŠEL, V.: *Congruences in ordered sets*, Czech Math. Journal **123** (1998), 95-100.

[6] CHAJDA, I.: *Congruences in transitive relational systems*, Miskolc Math. Notes **5/1** (2004), 19-23.

[7] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., STEIN C.: *Új algoritmusok*, Scolar Informatika, 2003.

[8] CROISOT, R.: *Condition suffisante pour l'égalité des longueurs de deux chaines de meme extrémites dans une structure. Applications aux relations d'équivalences et aux sous-groupes*, Comptes Rendus Paris **226** (1948), 767-768.

[9] CZÉDLI, G.: *Hálóelmélet*, Egyetemi jegyzet, JATE, Szeged, 1996.

[10] CZÉDLI, G., LENKEHEGYI A.: *On congruence n-distributivity of ordered algebras*, Acta Math. Hungar. **41** (1983), 17-26.

[11] CZÉDLI, G., LENKEHEGYI A.: *On classes of ordered algebras and quasiorder distributivity*, Acta Math. Hungar. **46** (1983), 41-54.

[12] DAVEY, B. A., PRIESTLEY, H. A.: *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] DORFER, G.: *Lattice-extensions by means of convex sublattices*, Contributions to General Algebra 9, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1995, pp. 127-132.

[14] DORFER, G., HALAŠ, R.: *An order on the convex directed subsets of a poset and a link to congruence relations*, Contributions to General Algebra 15, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 2004, pp. 185-190.

[15] FISHBURN, P. C.: *Interval Orders and Interval Graphs*, Willey, New York, 1985.

[16] FOLDES, S.: *Fermetures sur les chaines*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A **276** (1973), 1405-1406.

[17] FOLDES, S.: *Rélations denses et dispersées: extension d'un théoreme de Hausdorff*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A **277** (1973), 269-271.

[18] FOLDES, S.: *On intervals in relational structures,* Zeitschr. f. Math. Logik und Grunlagen d. Math. Bd. **26** (1980), 97-101.

[19] FOLDES, S., RADELECZKI, S.: *On interval decomposition lattices,* Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications **24** (2004), 95-114.

[20] FOLDES, S., SZIGETI, J.: *Maximal compatible extensions of partial orders,* J. Australian Math. Soc. **81** (2006), 245-252.

[21] FRAISSÉ, R.: *Present problems about intervals in relation theory and logic*, 179-200 in: "Non-classical Logics, Model theory and Computability", North-Holland, Amsterdam, 1977.

[22] FRASNAY, C.: *Quelques problémes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes,* Annales de l'institut Fourier, tome **15**, no. 2 (1965) 415-524.

[23] FUCHS, L.: *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, 1963.

[24] GANDER, W., HŘEBÍČEK, J.: *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB*, Sringer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.

[25] GRAHAM, R. L.: *The Combinatorical Mathematics of Scheduling*, Sci. Am. **238** (1978), 124-132.

[26] GRÄTZER, G.: *Universal Algebra*, Sringer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[27] GRÄTZER, G.: *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2003.

[28] HALAŠ, R.: *Congruences on posets,* Contributions to General Algebra 12 (1995), Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 2000, pp. 195-210.

[29] HAUSDORFF, F.: *Grundzüge einer Theorie der geordnetetn Mengen*, Math. Ann. **65** (1918), 435-505.

[30] IVÁNYI, A. (szerk.): *Informatikai algoritmusok*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

[31] JÓNSSON, B.: *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand., **21** (1967), 110-121.

[32] JORDÁN, T,: *Ütemezés*, Egyetemi jegyzet, Budapest, 2007.

[33] KOLIBIAR, M.: *Congruence relations and direct decompositions of ordered sets*, Acta Sci. Math. (Szeged) **51** (1987), 129-135.

[34] LENGVÁRSZKY, ZS.: *Linear extensions of partial orders preserving antimonotonicity,* Publ. Math. Debrecen **38/3-4** (1991), 279-285.

[35] MÖHRING, R. H.: *Algorithmic aspects of the substitution decomposition in optimization over relations, set systems and Boolean functions*, Annals of Operation Research **4** (1985/6), 195-225.

[36] MÖHRING, R. H., RADERMACHER, F.J.: *Substitution decomposition of discrete stuctures and connections to combinatorial optimization*, Ann. Discrete Math. **19** (1984), 257.

[37] ORE, O.: *Chains in partially ordered sets,* Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 558-566.

[38] PINEDO, M.: *Sheduling (Theory, algorithms and systems)*, Prentice Hall, 2002.

[39] RACSMÁNY, A.: *Ütemezéselmélet*, MKKE jegyzet, 1981.

[40] RADELECZKI, S., SZIGETI J.: *Linear orders on general algebras,* Order **22** (2005), 41-62.

[41] RIVAL, I. (ed.): *Algorithms and Order,* Kluwer Academic Publishers, Ottawa, 1989.

[42] SCHRÖDER, B. S. W.: *Ordered Sets, An Introduction*, Birkhäuser, 2002.

[43] STERN, M.: *Semimodular Lattices, Theory and Applications,* Cambridge University Press, 1999.

[44] STURM, T.: *Verbände von Kerner isotoner Abbildungen*, Czech Math. Journal **22** (1972), 126-144.

[45] STURM, T.: *Einige Chatacterisationen von Ketten*, Czech Math. Journal **23** (1973), 375-391.

[46] STURM, T.: *On the lattice of kernels of isotonic mappings*, Czech Math. Journal **27** (1977), 258-295.

[47] SZÁSZ, G.: *Bevezetés a hálóelméletbe*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[48] SZIGETI, J., NAGY, B.: *Linear extensions of partial orders preserving monotonicity,* Order **4** (1987), 31-35.

[49] SZIGETI, J.: *On the intersection of monotonicity preserving linear extensions,* Acta Math. Hung. **55** (1-2) (1990), 161-163.

[50] SZIGETI, J.: *Algebra*, Egyetemi jegyzet, Miskolc, 2003.

[51] SZIGETI, J.: *Linear orders on rings*, Communications in Algebra **33** (2005), no. 8, 2683-2695.

[52] SZPILRAJN, E.: *Sur l'extension de l'ordre partiel,* Fund. Math. **16** (1930), 386-389.

[53] TROTTER, W. T., MOORE J. I.: *The dimension of planar posets,* J. Comb. Theory **22**, 54-67.

[54] TROTTER, W. T.: *Combinatorics and Partially Ordered Sets, Dimension Theory,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore-London, 1992.

[55] VIZVÁRI, B.: *Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe*, Egyetemi jegyzet, ELTE Budapest, 1994.