Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseiről ütemezéselméleti vonatkozásokkal

doktori (PhD) értekezés tézisei

Készítette:
Lengyelné Szilágyi Szilvia

aki doktori (PhD) fokozat elnyerésére pályázik

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Doktori iskola vezető:
Prof. Dr. Tóth Tibor
A műszaki tudomány doktora

Tudományos vezető:
Dr. habil Szigeti Jenő
A matematika tudomány kandidátusa

Miskolc, 2009

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

A rendezett algebrai struktúrák elmélete a modern matematika napjainkban is intenzíven kutatott területe. Azok az algebrai struktúrák, amelyek parciális vagy teljes rendezéssel vannak ellátva gyakran megjelennek a matematika különböző diszciplínáiban. A disszertációban részbenrendezések bizonyos kompatibilis kiterjesztéseivel foglalkozunk. Az első részben egyműveletes unáris algebrákban új jellemzését adjuk a maximális kompatibilis kiterjesztéseknek és ezt felhasználva meghatározzuk ezen kiterjesztések metszetét. A második részben lineáris kiterjesztéseket használunk az úgynevezett rendezés-kongruenciák vizsgálatához. A halmaz részbenrendezése algebrai szempontból egyáltalán nem jelent erős kötöttséget. A helyzet azonban rögtön megváltozik, ha rendezéstartó műveletet is tekintünk. Ebben az esetben a vizsgálatok során az alapvető kombinatorikus módszerek mellett megjelennek, sőt gyakran előtérbe kerülnek az algebrában szokásos módszerek.

Az algebra ágai között sok olyan van, amelyekben az elért konkrét eredményeket a matematika egyéb ágaiban, valamint az informatika területén is fel lehet használni. Az ilyen eredmények száma egyre növekszik. Napjainkban, az elméleti számítástudomány által felvetett megoldandó feladatok körében a rendezés talán a leggyakrabban használt fogalmak közé sorolható. A számítástudomány két nagy területén kifejezetten meghatározó szerep jut a rendezésnek. Az elsőt az adatszerkezetek jelentik, itt a rendezés már jól megszokott fogalom. A második tématerületet az optimalizálás jelenti, hiszen gyakori eset, hogy rendezési feladat merül fel az optimalizálási problémák során. Ütemezési, kiválasztási és keresési feladatok kapcsán a megoldást biztosító eljárások általában rendezésen alapulnak. A megoldást adó rendezéseknek rendelkezniük kell a transzformálhatóság tulajdonságával, amely lényegében a részleges illetve a lineáris kiterjesztéseket jelenti adott részbenrendezés esetén, ugyanis ezen kiterjesztések már önmagukban képesek bemutatni az adott ütemezést, kiválasztást.

Az ütemezési problémákban, általánosan fogalmazva, a cél bizonyos tevékenységek elvégzésére olyan időbeosztást találni, amely figyelembe veszi a rendelkezésre álló erőforrásokat, és valamilyen szempont szerint optimális. A klasszikus ütemezéselmélet fontos területét alkotják azok a problémák, ahol adott feladathalmazt kell egy vagy több egységnyi kapacitású erőforráson (processzor vagy gép) optimálisan vagy közel optimálisan beütemezni adott célfüggvény mellett. Szinte minden esetben hatékony (polinomiális futásidejű) egzakt, vagy ahol ez nem lehetséges, approximációs algoritmusok kidolgozása a cél. Ehhez a problémakörhöz szorosan kapcsolódik kutatómunkánk azon gyakorlati alkalmazása, amelyben a részbenrendezett halmaz minimális lineáris rendezés-kongruenciáit használjuk fel olyan ütemezési feladatok megoldásához, ahol adott időegység alatt több egységnyi kapacitású gép is dolgozhat.

1.1 Irodalmi áttekintés

A részbenrendezett halmazok és a hálók elméletének tanulmányozása jelentette kutatási témámhoz az elméleti alapot. E két témakör szorosan kapcsolódik egymáshoz, így a kiindulópontként felhasznált irodalom jelentős része mindkét témakörben hasznosnak bizonyult. A magyar nyelven íródott művek közül Szász Gábor klasszikusnak számító *Bevezetés a hálóelméletbe* című könyvét ([31]), Czédli Gábor modernebb hangvételű *Hálóelmélet* jegyzetét

([7]) és Szigeti Jenő *Algebra* jegyzetét ([34]) emelném ki. Az angol nyelvű irodalomban is könnyen találunk jól használható forrásokat. Ezek egyikét a Davey-Priestley szerzőpáros által írt *Introduction to Lattices and Order* című monográfia jelenti ([10]). Egy másik mértékadó forrást William T. Trotter *Combinatorics and Partially Ordered Sets, Dimension Theory* című könyve jelent ([37]). A kiemelt művek mellett a [3], [21] és [30] könyveket is használtuk.

A geometria alapjaira vonatkozó kutatások kapcsán keletkezett a rendezett struktúrák elmélete. E témakör alapművének Fuchs László *Partially Ordered Algebraic Systems* című könyve számít ([19]). A rendezett algebrák elméletének egyik sarkalatos problémája, hogy egy (A, F, r) részbenrendezett algebrai struktúra esetén az r részbenrendezés R kompatibilis lineáris kiterjesztésének létezésére szükséges és elégséges feltételt adjon meg. A klasszikus algebrai struktúrákban, tehát amikor (A, F) csoport vagy gyűrű, a lineáris kiterjesztésekkel kapcsolatos problémák köre alaposan kidolgozott, bőséges irodalom található hozzá (pl. [19], [35]). A részbenrendezett halmazok elméletének egyik alappillére a részbenrendezés lineárissá való kiterjeszthetőségét kimondó Szpilrajn tétel a legegyszerűbb esetben, azaz $F = \varnothing$ esetén ad választ a fenti kérdésre ([36]). Bonyolultabb, de még kezelhető helyzet keletkezik akkor, ha egy rendezéstartó függvényt (egyváltozós műveletet) is tekintünk az alaphalmazon. Az első lépéseket ebben az irányban Frasnay ([18]), majd később Szigeti, Nagy ([32]) és Lengvárszky ([26]) tették meg. Ha $F = \{f\}$ és $f : A \to A$ egyváltozós művelet, akkor a kompatibilis (rendezéstartást megőrző) lineáris kiterjesztés létezésének szükséges és elégséges feltételét Szigeti és Nagy cikkében találjuk. A szerzők lényegében a Szpilrajn tételt általánosították [32] dolgozatukban, amelyben igazolták, hogy ha (A, r) részbenrendezett halmaz és $f : A \to A$ olyan ciklusmentes függvény, amely kompatibilis a $\leq_r$ relációra nézve, akkor r kiterjeszthető lineárissá úgy, hogy a R lineáris kiterjesztés szintén kompatibilis tulajdonságú.

Földes István és Szigeti Jenő [17] dolgozatukban bevezették az f-tiltott elempár fogalmát és ezen párok alkalmazásával megadták az f-kvázilinearitás fogalmát kompatibilis részbenrendezések esetén. A szerzők [17]-ben megmutatták, hogy az (A, f) unáris algebra minden kompatibilis részbenrendezése kiterjeszthető úgynevezett f-kvázilineáris részbenrendezéssé. Az említett tétel figyelemre méltó következménye, hogy a maximális kompatibilis részbenrendezések (adott f esetén) valójában a kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezések az (A, f) unáris algebrán. A rendezéstartást megőrző maximális - tehát nem feltétlenül lineáris - kiterjesztésekről ad tehát teljes leírást [17].

A kompatibilis lineáris kiterjesztések metszetének leírása ciklusmentes részbenrendezett $(A, f, \leq_r)$ unáris algebra esetén Szigeti [33] dolgozatában olvasható.

Részbenrendezett halmazokon a kongruencia reláció fogalmára az irodalomban különféle definíciók léteznek. A kongruencia valamennyi megfogalmazásában olyan ekvivalencia-relációként szerepel, amelynek osztályai konvex részhalmazok (pl. [4], [25]). Az utóbbi években számos cikk foglalkozott a félhálók és hálók kongruenciáinak részbenrendezett halmazokra való általánosításával. Valamennyi dolgozatban közös gondolat az, hogy ezen kongruenciák megadhatóak bizonyos izoton függvények magjaiként ([4], [5], [11], [12] és [22]). A rendezés-kongruencia és a rendezésőrző-partíció fogalmát először Trotter vezette be ([37]). Czédli Gábor és Lenkehegyi Attila rendezett algebrákon definiálta a rendezés-kongruencia fogalmát és vizsgálta ezen kongruenciák tulajdonságait ([8], [9]). Felfogásuk több ponton kapcsolódik Bloom korábbi eredményeihez ([2]). Az általuk megadott definícióból a Trotter-féle kongruencia fogalom levezethető.

Az intervallum fogalma a rendezett halmazok elméletében szinte a kezdetektől megtalálható. A részbenrendezett halmaz intervallum dekompozícióira vonatkozó eredmények a [8], [13], [14], [15] és [16] cikkekben olvashatóak.

Az értekezésben bemutatott program alapját képező algoritmusok megalkotásához alkalmazott technikát az *Új algoritmusok* ([6]) című könyv alapján tanulmányoztam.

Több ezer különböző ütemezési feladatról találhatunk cikket a szakirodalomban, és számuk egyre nő. Az ütemezéselmélet áttekintéséhez a [24], [28], [38] jegyzeteket, az [1], [23], [27] és [29] könyveket, valamint a [20] cikket használtam. A kitűzött ütemezéselméleti feladat megoldásának kapcsán a hatékony megoldást kínáló mohó algoritmusok felé fordult figyelmünk. Közös jellemzőjük, hogy egy adott lépésben mindig az optimálisnak látszó választást teszik. A mohó stratégia egy igen hatékony eszköz, amelynek elsajátítását a [6] és [37] könyvek tették lehetővé számomra.

1.2 A kutatás célja

Tudományos kutatómunkám a részbenrendezett unáris algebrák témaköréhez kapcsolódik. Alapvetően két fő feladat elvégzésére törekedtünk.

A [17], [32] és [33] dolgozatok alapján adódott az ötlet, hogy általánosítsuk [33] eredményeit azokra az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebrákra, amelyekre az $f : A \to A$ függvény ciklusmentességét nem követeljük meg. Ehhez meg kell adnunk az r részbenrendezés maximális kompatibilis, azaz kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén.

A matematikai háttér pontos kidolgozása mellett a felhasznált fogalmak és a bizonyított eredmények szemléltetésére olyan példa megalkotására törekedtünk, amely megfelelő megszorításokkal végessé tehető, így az algoritmusok megadása után számítógépes program írását céloztuk meg. A programmal szemben azt az elvárást támasztottuk, hogy adott környezetben meghatározza az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén az r részbenrendezés valamennyi maximális kompatibilis kiterjesztésének metszetét, továbbá a metszet létrehozásához szükséges lépéssorozatban minden olyan numerikus értéket kiszámítson, amelyek fontos információkat hordoznak. A program tesztelése során természetes módon adódott ezeken felül a futási idő csökkentésének igénye.

Az irodalom alapos tanulmányozása után a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak és intervallum-kongruenciáinak vizsgálatával foglalkoztunk. Keressük ezen kongruenciák fontosabb tulajdonságait, feltárjuk a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és intervallum-kongruenciái közötti kapcsolatokat, valamint a lineáris kiterjesztésekkel összefüggő momentumokat.

Elméleti eredményeink gyakorlati vonatkozásait az ütemezéselmélet területén vizsgáljuk. A kitűzött feladat olyan ütemezés meghatározása, amely választ ad arra a kérdésre, hogy melyik munkát mikor végezzük, ha adott feladat esetén lehetőség van a párhuzamos munkavégzésre.

2 Főbb eredmények

2.1 Maximális kompatibilis kiterjesztések

Legyen $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra. Definiáljuk az alábbi ekvivalenciarelációt az A halmazon:

$$\Phi = \{(x, y) \mid f^k(x) = y \text{ és } f^l(y) = x \text{ valamilyen } k, l \geq 0 \text{ egész számokra}\}.$$

Alkalmazzuk a továbbiakban az alábbi jelölést:

$$A^* = A/_\Phi = \{[x]_\Phi \mid x \in A\}.$$

Az $f^* : A^* \longrightarrow A^*$ indukált függvény értelmezése:

$$f^*([x]_\Phi) = [f(x)]_\Phi \,, \qquad x \in A.$$

Könnyen látható, hogy f^*-nak nincs valódi ciklusa.

Definiáljuk a $\rho(r)$ reflexív bináris relációt az A^* halmazon a következőképpen:

$$\rho(r) = \{([x]_\Phi \,, [y]_\Phi) \in A^* \times A^* \mid x' \leq_r y' \text{ valamely } x' \in [x]_\Phi \,, \, y' \in [y]_\Phi \text{ esetén}\}.$$

2.1. Lemma.
A $\rho(r)$ reflexív bináris reláció $r^* = \overline{\rho(r)}$ tranzitív lezártja kompatibilis részbenrendezés az (A^*, f^*) unáris algebrán.

Az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármast az $(A, f, \leq_r)$ hármas összehúzott részbenrendezett unáris algebrájának nevezzük. Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{QL}(A, f, \leq_r) = \{R \mid r \subseteq R \subseteq A \times A, R \text{ kompatibilis } f\text{-kvázilineáris kiterjesztés}\},$$

$$\mathcal{L}(A, f, \leq_r) = \{R \mid r \subseteq R \subseteq A \times A \text{ és } R \text{ kompatibilis lineáris rendezés}\}.$$

Egy $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ kompatibilis lineáris kiterjesztésre értelmezzük az A halmazon az alábbi reflexív relációt:

$$\lambda(L) = \{(u, v) \in A \times A \mid ([u]_\Phi \,, [v]_\Phi) \in L \text{ és } (u, v) \text{ nem } f\text{-tiltott}\}.$$

A következő tétel teljes jellemzést biztosít az r részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris kiterjesztéseiről az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas r^* részbenrendezésének kompatibilis lineáris kiterjesztéseinek felhasználásával.

2.2. Tétel.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és R kompatibilis részbenrendezés kiterjesztése r-nek, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$.

(2) $R = \lambda(L)$ valamely $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ esetén.

2.3. Definíció.
Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén az

$$r_f = \mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = \bigcap_{R \in \mathcal{QL}(A,f,\leq_r)} R$$

metszetet az r részbenrendezés lezártjának nevezzük az (A, f) párra nézve.

Vezessük be az alábbi fogalmakat [32] megfelelő definíciói alapján.

2.4. Definíció.
Az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra $a \in A$ eleme

(1) $\uparrow$-definit, ha $f^p(a) <_r f^q(a)$ valamely $0 \leq p < q$ egész számokra,

(2) $\downarrow$-definit, ha $f^q(a) <_r f^p(a)$ valamely $0 \leq p < q$ egész számokra,

(3) indefinit, ha $f^p(a) \neq f^q(a)$ esetén $f^p(a)$ és $f^q(a)$ összehasonlíthatatlan az r relációra nézve minden $0 \leq p, q$ egész számra.

2.5. Következmény.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra és $a \in A$, akkor a $\uparrow$-definit, $\downarrow$-definit és indefinit tulajdonságok közül az a elem pontosan egyet teljesít.

Definiáljuk az $M_\uparrow$, $M_\downarrow$ és M halmazokat úgy, mint [33]-ban.

2.6. Definíció.

$$\begin{aligned}
M_\uparrow &= \{(x, y) \in A \times A \mid x \uparrow \textit{-definit, } (\exists m)(\exists t) 0 \leq m \leq t, f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)\},\\
M_\downarrow &= \{(x, y) \in A \times A \mid x \downarrow \textit{-definit, } (\exists m)(\exists t) 0 \leq t \leq m, f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x)\},\\
M &= \{(x, y) \in A \times A \mid x \textit{ indefinit, } (\exists m)(\exists t)(\exists m')(\exists t') 0 \leq m \leq t, 0 \leq t' \leq m',\\
&\qquad f^t(x) \leq_r f^m(y) \neq f^m(x), f^{t'}(x) \leq_r f^{m'}(y) \neq f^{m'}(x)\}.
\end{aligned}$$

Készítsük el továbbá az alábbi halmazt:

$$P = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \text{ nem } f\text{-tiltott}\}.$$

A következő tétel részbenrendezett unáris algebra esetén teljes leírást ad az r részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetéről.

2.7. Tétel.
Ha $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra, akkor

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = (M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P.$$

2.2 Az aciklikus $(A, f, \hat{f})$ részbenrendezett unáris algebra

Az (A, f) unáris algebrának az $x \in A$ eleme által generált részalgebráját jelölje $\langle x \rangle_f$. Definiáljuk az $\hat{f} \subseteq A \times A$ relációt a következőképpen:

$$x \hat{f} y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x \rangle_f \subseteq \langle y \rangle_f.$$

2.8. Állítás.
Az (A, f) ciklusmentes unáris algebrának $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezése.

2.9. Állítás.
Tegyük fel, hogy az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $x, y \in A$ elemeire $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \emptyset$. Ekkor pontosan egy olyan $z \in A$ elem létezik, amelyre

$$\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f = \langle z \rangle_f$$

teljesül. Ezt az elemet az x és y elemek f-metszetének nevezzük, jelölésére az $x \triangle y$- t használjuk.

2.10. Definíció.
Ha az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $x, y \in A$ elemeire $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \emptyset$, akkor az x és y elemek f-távolsága:

$$\delta(x, y) = |(\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f) \cup (\langle y \rangle_f \setminus \langle x \rangle_f)| = |\langle x \rangle_f \setminus \langle y \rangle_f| + |\langle y \rangle_f \setminus \langle x \rangle_f|.$$

A 2.9. Állítás miatt az x és y elemek f-távolsága $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \emptyset$ esetén:

$$\delta(x, y) = |\langle x \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f| + |\langle y \rangle_f \setminus \langle x \triangle y \rangle_f|.$$

Az alábbi tétel az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $\hat{f}$ részbenrendezésének lezártját írja le.

2.11. Tétel.
Az (A, f) ciklusmentes unáris algebra $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezésének az $(\hat{f})_f$ lezártjára és az $x, y \in A$ elemekre teljesül, hogy:

$$(x, y) \in (\hat{f})_f \;\Leftrightarrow\; \textit{ha } x = y, \;\textit{ vagy } \langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f \neq \emptyset \textit{ és } \delta(x, x \triangle y) < \delta(y, x \triangle y).$$

2.3 Kongruenciák részbenrendezett halmazokon

Az alábbi definíció alapjául a [8] cikk szolgált.

2.12. Definíció.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció A-n.

(1) Az $x_0, x_1, ..., x_n \in A$, $(n \geq 1)$ sorozatot ρ-sorozatnak nevezzük, ha bármely $i \in \{1, ..., n\}$ esetén vagy $(x_{i-1}, x_i) \in \rho$ vagy $x_{i-1} <_r x_i$ (azaz $(x_{i-1}, x_i) \in \rho \cup r$). Ha $x_0 = x_n$, akkor ρ-körről szólunk.

(2) A ρ reláció rendezés-kongruencia az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazon, ha minden $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ ρ-kör esetén

$$[x_0]_\rho = [x_1]_\rho = ... = [x_n]_\rho$$

teljesül.

2.13. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz, $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció A-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

(1) ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en.

(2) $\overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1} = \rho$.

(3) Quord(A)-ban $(r \vee \rho) \cap (r^{-1} \vee \rho) = \rho$.

(4) Létezik olyan $\theta \subseteq A \times A$ kvázirendezés, amire $r \subseteq \theta$ és $\theta \cap \theta^{-1} = \rho$.

(5) Létezik olyan $r \subseteq R$ lineáris kiterjesztés, amelyre ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_R)$-en.

2.14. Definíció.
A $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaznak intervallum-kongruenciája, ha minden $[x]_\rho \subseteq A$ ekvivalencia osztály intervalluma $(A, \leq_r)$-nek.

2.15. Állítás.
Ha $\rho \subseteq A \times A$ egy rendezés-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek, ahol R lineáris, akkor ρ intervallum-kongruenciája $(A, \leq_R)$-nek.

2.16. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és ρ ekvivalenciareláció az A halmazon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) ρ intervallum-kongruencia $(A, \leq_r)$-en.

(2) $\rho \cup r$ tranzitív.

(3) ρ rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, valamint a $\kappa : A \to A/\rho$ kanonikus leképezésre és a $\leq_{r/\rho}$ indukált részbenrendezés

$$\kappa^{-1}(r/\rho) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ vagy } \kappa(x) <_{r/\rho} \kappa(y)\}$$

ősképére $\kappa^{-1}(r/\rho) = r$.

(4) Léteznek olyan $r \subseteq R_i$, $i \in I$ lineáris kiterjesztések, amelyekre $r = \bigcap_{i \in I} R_i$ és ρ rendezés- ($\Leftrightarrow$ intervallum) kongruenciája $(A, \leq_{R_i})$-nek minden i-re.

2.17. Következmény.
Ha $\rho \subseteq A \times A$ egy intervallum-kongruenciája $(A, \leq_r)$-nek, akkor rendezés-kongruenciája is.

Jelölje $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ vagy röviden $\mathcal{O}(A)$ az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz valamennyi rendezés-kongruenciájának halmazát. $(\mathcal{O}(A), \subseteq)$ részbenrendezett halmaz a halmazelméleti tartalmazásra nézve.

2.18. Tétel.
Legyen $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz. Ekkor az $\mathcal{O}(A)$ háló relatív komplementumos. Ha $\varphi \prec \theta$ rákövetkezés teljesül $\mathcal{O}(A)$-ban, akkor ugyanez következik be $\mathrm{Eq}(A)$-ban is. Következésképpen $\mathcal{O}(A)$ is teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt.

2.19. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz. Ekkor az $\mathcal{O}(A)$ háló atomisztikus és duálisan atomisztikus. Az $\mathcal{O}(A)$ háló valamennyi atomja felírható

$$\nu_{\{a,b\}} = \{a, b\} \cup \big\{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\big\}$$

alakban, ahol $a, b \in A$ és vagy $a \prec b$ vagy pedig a és b összehasonlíthatatlan elemek a $\leq_r$ reláció szerint.

2.20. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz.

(1) Ha $\mathcal{O}(A)$ részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak, akkor $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló.

(2) Ha $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló, akkor $(A, \leq_r)$ egy úgynevezett intervallum-rendezés.

2.21. Tétel.
Egy véges $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmazra az alábbiak ekvivalensek.

(1) $\mathcal{O}(A)$ gyengén 0-disztributív háló.

(2) $\mathcal{O}(A)$ Boole-háló.

(3) $(A, \leq_r)$ vagy lánc, vagy két elemből álló antilánc.

2.22. Következmény.
Legyen $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz és ρ olyan rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, amelyre $|A/\rho| \geq 3$. Ekkor az $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\rho)$ főfiltere Boole-háló.

3 Új tudományos eredmények

3.1 Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek jellemzése

Szpilrajn tétele ([36]) szerint az A halmaz bármely $\leq_r$ részbenrendezése kiterjeszthető lineáris rendezéssé az A halmazon. Következésképpen a maximális (tovább már nem bővíthető) részbenrendezések (az adott relációra nézve) az A halmazon éppen az A halmaz lineáris rendezései. Ezt a klasszikus eredményt általánosította Szigeti Jenő és Nagy Bertalan [32] cikkükben, amelyben igazolták, hogy ha $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz és $f : A \to A$ ciklusmentes rendezés endomorfizmus, amely kompatibilis a $\leq_r$ relációra nézve, akkor r kiterjeszthető lineárissá úgy, hogy a R lineáris kiterjesztés szintén kompatibilis tulajdonságú. Ennek az eredménynek egy általánosítása Földes István és Szigeti Jenő [17] dolgozatában olvasható. A szerzők igazolták, hogy az (A, f) unáris algebra minden kompatibilis részbenrendezése kiterjeszthető úgynevezett f-kvázilineáris részbenrendezéssé. Megmutatták, hogy a maximális kompatibilis részbenrendezések (adott relációra nézve) valójában a kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezések az (A, f) unáris algebrán. Ezen eredmények felhasználásával megadom az r részbenrendezés maximális kompatibilis f-kvázilineáris részbenrendezés kiterjesztéseinek egy új jellemzését tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ hármas esetén, azaz olyan részbenrendezett mono-unáris algebrákra, amelyekre az f függvény nem feltétlenül ciklusmentes. A 2.2. Tétel alapján az alábbi tézist állítom fel:

1. tézis:

Teljes jellemzést megadó tételt fogalmaztam meg és igazoltam az r részbenrendezés kompatibilis f-kvázilineáris kiterjesztéseiről, azaz maximális kompatibilis kiterjesztéseiről, tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett mono-unáris algebra esetén, az $(A^*, f^*, \leq_{r^*})$ hármas r^* részbenrendezésének kompatibilis lineáris kiterjesztéseinek felhasználásával.

A 2.2. Tételből a [32] és a [17] dolgozatok korábbi eredményei speciális esetekként kaphatóak meg.

3.2 Részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszete

Szigeti [33] dolgozatában leírja adott ciklusmentes $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés valamennyi kompatibilis kiterjesztésének metszetét. Az 1. tézis alapjául szolgáló 2.2. Tétel lehetővé teszi, hogy általánosítsuk [33] eredményeit azokra az $(A, f, \leq_r)$ hármasokra, amelyekre az $f : A \to A$ függvény nem feltétlenül ciklusmentes. A metszetet megadó tétel megalkotásához, [32] megfelelő definíciói alapján, bevezettem az $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebrában a $\uparrow$-definit elem, $\downarrow$-definit elem és indefinit elem fogalmakat (nevezetes elemek). Megmutattam, hogy tetszőleges $a \in A$ elemre a három definíció közül pontosan egy teljesül. A nevezetes elemek felhasználásával az $M_\uparrow$, $M_\downarrow$ és M halmazok ugyanúgy definiálhatóak, mint [33]-ban. Az így létrehozott halmazok és az f-tiltott pár fogalmának felhasználásával megadtam tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetét (2.7. Tétel).

2. tézis:

Megfogalmaztam és bizonyítottam, az 1. tézis felhasználásával, tetszőleges $(A, f, \leq_r)$ részbenrendezett mono-unáris algebra esetén a $\leq_r$ részbenrendezés maximális kompatibilis kiterjesztéseinek metszetét leíró tételt.

Az 1. és a 2. tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 3. fejezete és az [SZ8] publikáció tartalmazza.

3.3 Az elméleti eredmények alkalmazása

Két alkalmazást mutatunk be a disszertáció 4. fejezetében a 2. tézis eredményeinek szemléltetésére. Az első esetben ciklusmentes részbenrendezett unáris algebra esetén adtunk meg egy speciális kompatibilis részbenrendezést, amelynek lezártját is meghatároztuk.

3. tézis:

Az (A, f) ciklusmentes mono-unáris algebra esetén értelmeztem az $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezést, amelynek $(\hat{f})_f$ lezártjáról (amely a 2. tézisben említett metszet) teljes leírást adtam.

A 3. tézis alapját jelentő 2.11. Tételt és az $\hat{f}$ kompatibilis részbenrendezés lezártjának leírásához felhasznált állításokat bizonyításukkal együtt a 4.1. alfejezet és az [SZ10] cikk tartalmazza.

A második bemutatott alkalmazásban nem követeljük meg az f függvény ciklusmentességét, így a megadott részbenrendezés esetén a lezárt néhány elemének meghatározásához felhasználjuk a metszet pontos leírását kimondó 2. tézist. A matematikai háttér pontos kidolgozása után a felhasznált fogalmak és a bizonyított eredmények szemléltetésére olyan példát alkottunk meg, amely megfelelő megszorításokkal végessé tehető. A 4.2. alfejezet egy konkrét ciklikus részbenrendezett unáris algebrát mutat be. Ez a példa az [SZ8] cikkben olvasható. Itt a metszet leírásához szükséges halmazok közül csak az $M_\uparrow$-t határozzuk meg, ugyanis az $M_\downarrow$ és M halmazok teljes leírása számos aleset vizsgálatával járó hosszú, nagy számolásigényű feladat. Ezért a $\mathbf{cl}(A, f, \leq_d)$ metszet (lezárt) teljes leírásához számítógépes programot készítettem a 2.7. Tétel algoritmizálhatóságára alapozva. Hét olyan algoritmust dolgoztam ki, amelyek a program alapjául szolgáltak. A megadott algoritmusok szorosan kapcsolódnak a kitűzött konkrét feladathoz, azonban általánosíthatóságuk, és ezáltal más környezetben történő alkalmazásuk általában könnyen megvalósítható. Az algoritmusok pszeudokódjait az értekezés 4.2 alfejezete mellett az [SZ9] dolgozat tartalmazza.

3.4 Részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáiról

Részbenrendezett halmaz esetén két viszonylag új kongruencia fogalmat vizsgáltam (rendezés- és intervallum-kongruencia). A részbenrendezett halmaz fent említett kongruenciáinak fontosabb tulajdonságait tanulmányoztam, feltártam a részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciái és intervallum-kongruenciái közötti kapcsolatokat, valamint a lineáris kiterjesztésekkel kapcsolatos momentumokat. A 2.13. Tétel, a 2.16. Tétel és a 2.17. Következmény alapján az alábbi tézist állítom fel:

4. tézis:

Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg és bizonyítottam az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáira, valamint intervallum-kongruenciáira. Megmutattam továbbá, hogy az $(A, \leq_r)$ valamennyi intervallum-kongruenciája egyben rendezés-kongruenciája is az adott $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaznak.

Az $(A, \leq_r)$ részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak teljes hálójára és intervallum-kongruenciáinak teljes féligmoduláris hálójára megmutattam, hogy e két háló megegyezik, ha a $\leq_r$ részbenrendezés lineáris. Emellett számos további érdekes tulajdonságot sikerült bizonyítani.

5. tézis:

Véges részbenrendezett halmaz rendezés-kongruenciáinak hálójára igazoltam, hogy olyan relatív komplementumos háló, amely annak ellenére teljesíti a Jordan-Hölder láncfeltételt, hogy maga a háló általában nem féligmoduláris. Azt is megmutattam, hogy ez a háló atomisztikus és duálisan atomisztikus, valamint akkor és csak akkor gyengén 0-disztributív, ha $(A, \leq_r)$ lánc vagy két elemből álló antilánc.

Az 5. tézis alapjául a 2.18. Tétel, a 2.19. Következmény és a 2.21. Tétel szolgál. Azt is bizonyítottam, hogy ha $\mathcal{O}(A)$ részhálója az $\mathrm{Eq}(A)$ hálónak, akkor $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló. Ha pedig $\mathcal{O}(A)$ féligmoduláris háló, akkor $(A, \leq_r)$ intervallum-rendezés. Igazoltam, hogy ha $(A, \leq_r)$ véges részbenrendezett halmaz és ρ olyan rendezés-kongruencia $(A, \leq_r)$-en, amelyre $|A/\rho| \geq 3$, akkor az $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ faktor-részbenrendezett halmaz pontosan akkor lineárisan rendezett, ha az $\mathcal{O}(A)$ háló $[\rho)$ főfiltere Boole-háló. A 4. és 5. tézis alapjául szolgáló tételeket bizonyításukkal együtt az értekezés 5. fejezete, valamint az [SZ2] és [SZ5] publikációk tartalmazzák.

A 4. és 5. tézis eredményeinek gyakorlati alkalmazhatóságát az ütemezéselmélet területén vizsgáltam. A Trotter-féle mohó algoritmust kiegészítettem egy olyan algoritmussal, amely adott véges $(M, \leq)$ részbenrendezett halmaz esetén megkeres egy minimális lineáris rendezés-kongruenciát, amely az $(M, \leq)$-vel adott ütemezési feladatra olyan megoldást ad, amely optimális párhuzamos munkavégzések segítségével lerövidíti a munka elvégzéséhez szükséges időt.

4 Summary

Our PhD dissertation contains new results about partially ordered mono-unary algebras. The first section is the introduction and in this section we formulate the aims of our research. In section 2 we provide the necessary prerequisites.

In the third section of our dissertation we deal with the intersection of maximal compatible partial orders. We present a characterization of the maximal compatible extensions of a given compatible partial order $\leq_r$ on a unary algebra (A, f). These extensions can be constructed by using the compatible linear extensions of $\leq_{r^*}$, where (A^*, f^*) is the so called contracted quotient algebra of (A, f) and the compatible partial order $\leq_{r^*}$ on (A^*, f^*) is naturally induced by $\leq_r$. We prove the following theorem:

4.1. Theorem. *If $(A, f, \leq_r)$ is a partially ordered unary algebra and R is a compatible partial order extension of r, then the following are equivalent.*

1. $R \in \mathcal{QL}(A, f, \leq_r)$.
2. $R = \lambda(L)$ *for some* $L \in \mathcal{L}(A^*, f^*, \leq_{r^*})$.

Using this characterization and applying the results of [17] and [33], we determine the intersection of the maximal compatible extensions of $\leq_r$.

4.2. Theorem. *If $(A, f, \leq_r)$ is a partially ordered unary algebra, then*

$$\mathbf{cl}(A, f, \leq_r) = (M_\uparrow \cup M_\downarrow \cup M \cup \{(x, x) \mid x \in A\}) \cap P.$$

All of the earlier results in [17], [32] and [33] about compatible extensions will appear as particular cases of our Theorems 4.1 and 4.2.

In section 4 we present two applications of our theoretical results. In our first application we give a special compatible partial order for an acyclic partially ordered mono-unary algebra and provide a complete description of the intersection of the compatible linear extensions of the given partial order.

4.3. Theorem. *If (A, f) acyclic unary algebra, then $\hat{f}$ is a compatible partial order on A and* for $x, y \in A$ *we have*

$$(x, y) \in (\hat{f})_f \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \text{ or } \langle x\rangle_f \cap \langle y\rangle_f \neq \varnothing \text{ and } \delta(x, x\triangle y) < \delta(y, x\triangle y).$$

In our second application we illustrate our definitions and results on a concrete example.

In section 5 we deal with two relatively new notions. For order-congruences and interval-congruences we prove the following theorems.

4.4. Theorem. *Let $(A, \leq_r)$ be a poset and $\rho \subseteq A \times A$ an equivalence relation on A. Then the following are equivalent.*

(1) ρ is an order-congruence of $(A, \leq_r)$.

(2) $\overline{r \cup \rho} \cap (\overline{r \cup \rho})^{-1} = \rho$.

(3) $(r \vee \rho) \cap (r^{-1} \vee \rho) = \rho$ *holds in the lattice* $Quord(A)$.

(4) *There exists a quasiorder* $\theta \subseteq A \times A$ *such that* $r \subseteq \theta$ *and* $\theta \cap \theta^{-1} = \rho$.

(5) *There exists a linear extension* $r \subseteq R$ *such that* ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_R)$.

4.5. Theorem. *Let* $(A, \leq_r)$ *be a poset and* $\rho \subseteq A \times A$ *an equivalence relation on* A. *Then the following are equivalent.*

(1) ρ *is an interval-congruence of* $(A, \leq_r)$.

(2) $\rho \cup r$ *is transitive.*

(3) ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_r)$ *and we have* $\kappa^{-1}(r/\rho) = r$ *for the canonical map* $\kappa : A \to A/\rho$ *and for the pre-image*

$$\kappa^{-1}(r/\rho) = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq_r y \text{ or } \kappa(x) <_{r/\rho} \kappa(y)\}$$

of the induced partial order $\leq_{r/\rho}$.

(4) *We can find linear extensions* $r \subseteq R_i$, $i \in I$ *such that* $r = \bigcap_{i \in I} R_i$ *and* ρ *is an order- (⇔ interval) congruence of* $(A, \leq_{R_i})$ *for all* $i \in I$.

4.6. Corollary. *If* $\rho \subseteq A \times A$ *is an interval-congruence of* $(A, \leq_r)$ *then* ρ *is an order-congruence of* $(A, \leq_r)$.

4.7. Theorem. *Let* $(A, \leq_r)$ *be a finite poset. Then the lattice* $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ *satisfies the Jordan-Hölder (chain) condition. This lattice is atomistic and dually atomistic. Moreover* $\mathcal{O}(A, \leq_r)$ *is weakly* 0*-distributive if and only if* $(A, \leq_r)$ *is either a chain or a two-element antichain.*

4.8. Corollary. *Let* $(A, \leq_r)$ *be a finite poset and* ρ *an order-congruence on it and* $|A/\rho| \geq 3$. *Then the factor-poset* $(A/\rho, \leq_{r/\rho})$ *is linearly ordered if and only if the principal filter* $[\rho)$ *of* $\mathcal{O}(A)$ *is a Boolean lattice.*

In section 7 we show an application in connection with the theory of scheduling. Based on the results of section 6, we exhibit and implement an algorithm for determining minimal linear order-congruences, solving the given scheduling problem.

Az értekezés témakörében készített saját publikációk

[SZ1] SZILÁGYI, SZ.: *Részbenrendezések alkalmazása az ütemezéselméletben*, Doktoranduszok Fóruma (szekciókiadvány), Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003, pp. 257-262.

[SZ2] KÖRTESI, P., RADELECZKI, S., SZILÁGYI, SZ.: *An application of partial orders,* microCAD 2004, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2004, pp. 65-69.

[SZ3] SZILÁGYI, SZ.: *Kongruenciák és izoton függvények részbenrendezett halmazokon*, Doktoranduszok Fóruma (szekciókiadvány), Miskolci Egyetem, Miskolc, 2004, pp. 279-284.

[SZ4] SZILÁGYI, SZ.: *On Maximal Linear Extensions of Partial Orders*, microCAD 2005, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2005, pp. 155-159.

[SZ5] KÖRTESI, P., RADELECZKI, S., SZILÁGYI, SZ.: *Congruences and isotone maps on partially ordered sets,* Mathematica Pannonica 16/1 (2005), 39-55.

[SZ6] SZILÁGYI, SZ.: *Compatible partial orders in unary algebras*, "European Integration - Between Tradition and Modernity" Conference, Targu-Mures, 2005, pp. 723-727.

[SZ7] SZILÁGYI, SZ.: *The intersection of the compatible quasilinear extensions of a partial order,* microCAD 2008, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2008, pp. 73-78.

[SZ8] SZILÁGYI, SZ.: *A characterization and the intersection of the maximal compatible extensions of a partial order,* Order **25/4** (2008), 321-333.

[SZ9] SZILÁGYI, SZ.: *A numerical example for the intersection of the compatible quasilinear extensions of a partial order*, Manuscript

[SZ10] SZIGETI, J., SZILÁGYI, SZ.: *The partial order induced by an acyclic function*, Manuscript

Irodalomjegyzék

[1] BLAZEWICZ, J., ECKER, K. H., PESCH, E., SCHMIDT, G., WEGLARZ, J.: *Scheduling computer and manufactoring processes*, Springer, 1996.

[2] BLOOM, S. L.: *Varietes of ordered algebras*, J. Comput. System Sci. **13** (1976), 200-212.

[3] BURRIS, S., SANKAPPANAVAR, H. P.: *Bevezetés az univerzális algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[4] CHAJDA, I., SNÁŠEL, V.: *Congruences in ordered sets*, Czech Math. Journal **123** (1998), 95-100.

[5] CHAJDA, I.: *Congruences in transitive relational systems*, Miskolc Math. Notes **5/1** (2004), 19-23.

[6] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., STEIN C.: *Új algoritmusok*, Scolar Informatika, 2003.

[7] CZÉDLI, G.: *Hálóelmélet*, Egyetemi jegyzet, JATE, Szeged, 1996.

[8] CZÉDLI, G., LENKEHEGYI A.: *On congruence n-distributivity of ordered algebras*, Acta Math. Hungar. **41** (1983), 17-26.

[9] CZÉDLI, G., LENKEHEGYI A.: *On classes of ordered algebras and quasiorder distributivity*, Acta Math. Hungar. **46** (1983), 41-54.

[10] DAVEY, B. A., PRIESTLEY, H. A.: *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[11] DORFER, G.: *Lattice-extensions by means of convex sublattices*, Contributions to General Algebra 9, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1995, pp. 127-132.

[12] DORFER, G., HALAŠ, R.: *An order on the convex directed subsets of a poset and a link to congruence relations*, Contributions to General Algebra 15, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 2004, pp. 185-190.

[13] FOLDES, S.: *Fermetures sur les chaines*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A 276 (1973), 1405-1406.

[14] FOLDES, S.: *Rélations denses et dispersées: extension d'un théoreme de Hausdorff*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A 277 (1973), 269-271.

[15] FOLDES, S.: *On intervals in relational structures,* Zeitschr. f. Math. Logik und Grunlagen d. Math. Bd. **26** (1980), 97-101.

[16] FOLDES, S., RADELECZKI, S.: *On interval decomposition lattices,* Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications **24** (2004), 95-114.

[17] FOLDES, S., SZIGETI, J.: *Maximal compatible extensions of partial orders,* J. Australian Math. Soc. **81** (2006), 245-252.

[18] FRASNAY, C.: *Quelques problémes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes,* Annales de l'institut Fourier, tome **15**, no. 2 (1965) 415-524.

[19] FUCHS, L.: *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, 1963.

[20] GRAHAM, R. L.: *The Combinatorical Mathematics of Scheduling*, Sci. Am. **238** (1978), 124-132.

[21] GRÄTZER, G.: *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2003.

[22] HALAŠ, R.: *Congruences on posets,* Contributions to General Algebra 12 (1995), Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 2000, pp. 195-210.

[23] IVÁNYI, A. (szerk.): *Informatikai algoritmusok*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

[24] JORDÁN, T,: *Ütemezés*, Egyetemi jegyzet, Budapest, 2007.

[25] KOLIBIAR, M.: *Congruence relations and direct decompositions of ordered sets*, Acta Sci. Math. (Szeged) **51** (1987), 129-135.

[26] LENGVÁRSZKY, ZS.: *Linear extensions of partial orders preserving antimonotonicity,* Publ. Math. Debrecen **38/3-4** (1991), 279-285.

[27] PINEDO, M.: *Sheduling (Theory, algorithms and systems)*, Prentice Hall, 2002.

[28] RACSMÁNY, A.: *Ütemezéselmélet*, MKKE jegyzet, 1981.

[29] RIVAL, I. (ed.): *Algorithms and Order,* Kluwer Academic Publishers, Ottawa, 1989.

[30] SCHRÖDER, B. S. W.: *Ordered Sets, An Introduction*, Birkhäuser, 2002.

[31] SZÁSZ, G.: *Bevezetés a hálóelméletbe*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[32] SZIGETI, J., NAGY, B.: *Linear extensions of partial orders preserving monotonicity,* Order **4** (1987), 31-35.

[33] SZIGETI, J.: *On the intersection of monotonicity preserving linear extensions,* Acta Math. Hung. **55** (1-2) (1990), 161-163.

[34] SZIGETI, J.: *Algebra*, Egyetemi jegyzet, Miskolc, 2003.

[35] SZIGETI, J.: *Linear orders on rings*, Communications in Algebra **33** (2005), no. 8, 2683-2695.

[36] SZPILRAJN, E.: *Sur l'extension de l'ordre partiel,* Fund. Math. **16** (1930), 386-389.

[37] TROTTER, W. T.: *Combinatorics and Partially Ordered Sets, Dimension Theory,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore-London, 1992.

[38] VIZVÁRI, B.: *Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe*, Egyetemi jegyzet, ELTE Budapest, 1994.