Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Osztályozási fák, durva halmazok és alkalmazásaik

PhD értekezés tézisei

Készítette:
Veres Laura
okleveles matematikus-informatikus

Aki doktori (PhD) fokozat elnyerésére pályázik

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

DOKTORI ISKOLA VEZETŐJE:
Prof. Dr. Tóth Tibor
A műszaki tudomány doktora

TUDOMÁNYOS VEZETŐ:
Dr. habil Radeleczki Sándor
A matematikai tudomány kandidátusa

Miskolc, 2010

Bíráló Bizottság

Elnök:

Dr. Rontó Miklós DSc, egyetemi tanár (ME)

Titkár:

Dr. Kovács Szilveszter PhD, egyetemi docens (ME)

Tagok:

Dr. Csákány Béla DSc, professor emeritus (SZTE)
Dr. Baranyi Péter DSc, egyetemi docens (BME)
Dr. Juhász Imre PhD, dr. habil, egyetemi docens (ME)
Dr. Hujter Mihály CSc, egyetemi docens (BME)

Hivatalos bírálók:

Dr. Kovács László PhD, egyetemi docens (ME)
Katonáné Dr. Horváth Eszter PhD, egyetemi adjunktus (SZTE)

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**
1.1 Irodalmi áttekintés 5
1.2 A kutatás célja 6

2. Főbb eredmények **7**
2.1 Osztályozási fák és CD-independens halmazok 7
2.2 Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában 9
2.3 Durva halmazok 10

3. Új tudományos eredmények **13**

4. Summary **16**

Az értekezés témakörében készített saját publikációk **17**

Irodalomjegyzék **18**

1. Bevezetés

Értekezésem első részében a hálóelméletből jól ismert struktúrát, a fogalomhálót vizsgálom. Egy fogalomháló, mint a neve is mutatja fogalmakból épül fel, azaz objektumokból és a rájuk jellemző tulajdonságokból, így tekinthetjük az emberi gondolkodás egyfajta absztrakt modelljének is. A fogalmakat egy, legtöbbször táblázatban megadott, kontextusból generáljuk és mint egy adatmodellből kiolvashatjuk az objektumok halmaza (például alkatrészek) és a rájuk jellemző tulajdonságok halmaza közötti kapcsolatot. A fogalompárok (objektumok és tulajdonságok párosa) fogalomhálóba rendezésével még jobb képet kaphatunk az adathalmaz elemei közötti rejtett kapcsolatokról, hierarchiájukról. Értekezésemben a fogalomhálók, ezen belül is a doboz-extenzió hálók elméletének egy kevésbé vizsgált alkalmazását, az objektumok osztályozási fákba való besorolását tanulmányozom. A nagyméretű adathalmazok elemeinek az ismert tulajdonságok alapján történő csoportosítása az adatbányászat egyik legfontosabb feladata. A csoportok kialakítása két eljárással történhet: osztályozással (ebben az esetben valamilyen tulajdonságok alapján soroljuk be az elemeket) vagy klaszterezéssel (ebben az esetben az adatok maguk alakítják ki a „csoportjaikat"). Mindkét módszer lényege, hogy az objektumhalmazt úgy particionálja, hogy az azonos csoportba tartozó objektumok több hasonlósággal rendelkezzenek, mint a többi csoportba sorolt elemek. Az adathalmazban való keresést könnyítik meg az általam vizsgált osztályozási fák.

A dolgozat második részében az ún. durva halmazokkal foglalkozom. A durva halmaz fogalma Z. Pawlak nevéhez fűződik. A durva halmazokat a korai 80-as években vezette be. Az elmélet alapötlete, hogy ismereteinket egy adott objektumról egy ún. megkülönböztethetetlenségi relációval adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy - két objektum „megkülönböztethetetlen" ha ismert tulajdonságaik alapján nem tudjuk őket megkülönböztetni egymástól. J. Pomykała és J. A. Pomykała egyik cikkükben bebizonyították, hogy ekvivalencia reláció esetén (vagyis ha a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív) a durva halmazok egy hálót alkotnak, mégpedig egy teljes Stone hálót. Ebből az eredményből kiindulva sikerült általánosítanom ezt a tételt reflexív és tranzitív (kvázirendezési) relációra, és így bebizonyítani egy a 90-es évek óta megválaszolatlan kérdést.

A durva halmazokat és alkalmazásaikat több szempontból is vizsgálták, például tanulmányozták hogy milyen kapcsolat van a durva halmazok elmélete és a fuzzy halmazok elmélete között, így született meg a fuzzy durva halmaz fogalma, amelyet az adatbányászatban használnak. Külön kiemelném az adatbányászatban és a közelítő algoritmusok kidolgozásában való felhasználásukat. Az, hogy kapcsolat van a fogalomanalízis és a durva halmazok elmélete között már korábban felmerült a szakirodalomban. A dolgozatomban bemutatom a durva halmazoknak, pontosabban a velük szoros összefüggésben lévő modális operátoroknak egy alkalmazását a csoporttechnológiában. A csoporttechnológiában az alkatrészgyártás megtervezése, illetve a gyártócellák kialakítása a különböző alkatrészek, technológiai folyamatok közötti hasonlóság felhasználásán alapszik. Az alkatrészcsoportok kialakításánál az ún. komplex alkatrészekből is kiindulhatunk, melyeket úgy kapunk, hogy egy alkatrészcsoport valamennyi tagjának a tulajdonságait egyetlen (legtöbbször képzeletbeli) alkatrészen jelenítjük meg. A csoporthoz tartozó összes többi alkatrészt ugyanezek a tulajdonságok egy részhalmaza jellemez. Dolgozatomban egy algoritmust konstruáltam, ami egy alkatrészhalmazhoz tartozó kontextusból kiindulva megadja a csoportnak megfelelő komplex alkatrészeket, pontosabban a komplex alkatrészek tulajdonságait.

1.1. Irodalmi áttekintés

Kutatásom első részének elméleti alapját a részbenrendezett halmazok és hálók elmélete jelenti. A kutatásomhoz bőséges szakirodalmat találtam. A magyar nyelven írott művek közül a Szász Gábor klasszikusnak számító *Hálóelmélet* című könyvét ([28]), Czédli Gábor *Hálóelmélet* jegyzetét ([2]) emelném ki, amely már a fogalomhálókkal kapcsolatos definíciókat is tartalmazza. Az angol nyelvű irodalomban is számos forrás található, ezek közül Grätzer György *General Lattice Theory* című könyvét és B. A. Davey, H. A. Priestley *Introduction to Lattices and Order* monográfiáját ([5]) emelném ki. A fogalomanalízis módszerét kitűnően mutatja be Bernhard Ganter és Rudolf Wille *Formal Concept Analysis* ([6]) című alapműve, amely nemcsak a legalapvetőbb definíciókat adja meg, hanem a további kutatási irányokat is nagyban meghatározza. Szintén nagy segítség, hogy az általuk létesített honlapon http://fcahome.org.uk megtalálhatók a fogalomanalízissel és alkalmazásaival kapcsolatos legújabb eredmények.

Az objektumhalmaz felbontásának problémáját Rudolf Wille vetette fel egyik cikkében ([29]). Ebből a cikkből kiindulva Radeleczki Sándor bevezette a dobozháló fogalmát és megvizsgálta ennek tulajdonságait [23], [24], [25], melyek nélkülözhetetlenek a kutatásomhoz. A dobozháló használata nagyban megkönnyíti a nagyméretű kontextusok, adathalmazok vizsgálatát, az ebben végzett kereséseket. A dolgozatban megvizsgálom, hogyan építhetők fel az ún. osztályozási fák tolerancia osztályokkal, ortogonális rendszerekkel - ehhez az elméleti alapot J. A. Srejder [27] könyve nyújtotta. Czédli Gábor ([4]) cikke alapján újabb ötletek születtek az osztályozási fák megkonstruálására. A kutatásomnak új irányt adott a B. Ganter, A. Körei, S. Radeleczki *Extent partitions and context extensions* című cikke ([10]), melynek hatására az osztályozási fák egy teljesen új alkalmazása vált lehetővé.

Az osztályozási fák megkonstruálására írt algoritmusoknál nagy segítséget nyújtott Kovács László cikke ([17]), amely egy hatékony módszert ad osztályozási fák megkonstruálásához. Az algoritmusok pszeudokódjainak megírásakor Cormen és társai által írt *Algoritmusok* c. könyvben ([1]) rögzített konvenciókat követtem.

Az értekezés másik kutatási irányának alapja a durva halmazok elmélete. A durva halmaz fogalmát Z. Pawlak vezette be a korai 80-as években. A kutatás elméleti alapjaként főként Z. Pawlak és J. Järvinen cikkeit [14], [15], [21] emelném ki. Az elmúlt három évtizedben különböző típusú (reflexív, szimmetrikus, tolerancia) relációk által definiált durva halmazokat vizsgáltak, ezen a területen is bőséges szakirodalmat találtam, melyek közül ismét J. Järvinen cikkét emelném ki [13]. A fogalomanalízis és a durva halmazok elméletének összekapcsolásával született meg az ún. Rough concept analysis. Az ún. modális operátorok segítségével Y. Yao [10] három különböző típusú „fogalomhálót" definiál. A modális operátorok segítségével bemutatunk egy csoportechnológiai alkalmazást. Ennek kiinduló pontja Mitrofanov *A csoportmegmunkálás technológiai alapjai* című könyve [20].

1.2. A kutatás célja

Tudományos kutatómunkám során két fő feladat elvégzésére törekedtem:

1. A [18] cikkből kiindulva általánosítottam az osztályozási fa fogalmát. Később a [7] cikk alapján adódott az az ötlet, hogy megvizsgáljuk, hogyan változik egy osztályozási fa, ha a kontextust, amelyből felépítettük bővítjük egy elemmel. A matematikai háttér pontos kidolgozása mellett fő célom volt egy olyan program megadása, amely egy elemi bővítés során a régi kontextushoz tartozó osztályozási fából kiindulva megépíti az új kontextushoz tartozó osztályozási fát. Egy másik célkitűzésem az volt, hogy optimalizáljam azt az eljárást, ami megadja az új kontextushoz tartozó doboz-extenzió hálót a kontextus elemi bővítése után.

2. A durva halmazok elméletével foglalkozó irodalom alapos áttanulmányozása után a kvázirendezéssel definiált durva halmazok vizsgálatával foglalkoztam. Tanulmányoztam, hogy hálót alkotnak-e illetve azt, hogy az így kapott háló milyen tulajdonságokkal rendelkezik. Megvizsgáltam a durva halmazok elméletének és a fogalomanalízis összekapcsolódásánál szerepet játszó modális operátorok felhasználását a csoporttechnológiai vizsgálatokban, azon belül is a komplex alkatrészek meghatározásában.

2. Főbb eredmények

2.1. Osztályozási fák és CD-independens halmazok

Egy **kontextus** nem más, mint egy (G, M, I) hármas, ahol G az objektumok halmaza, M az attribútumok halmaza, $I \subseteq G \times M$ pedig egy bináris reláció. A $g\,\mathrm{I}m$ reláció azt jelenti, hogy a g objektum rendelkezik az m tulajdonsággal (ahol $g \in G$, $m \in M$). Legyen $K = (G, M, I)$ egy kontextus és $H \subseteq G$ és $N \subseteq M$ két részhalmaz, akkor a $(H, N, I \cap H \times N)$ hármast a (G, M, I) kontextus **részkontextusának** nevezzük. Ha $A \subseteq G$ és $B \subseteq M$, akkor az (A, B) párt a (G, M, I) kontextushoz tartozó **fogalomnak** nevezzük, ha $A' = B$ és $B' = A$ teljesül, ahol
$A' = \{m \in M \mid g\,\mathrm{I}m \text{ valamennyi } g \in A\text{-ra}\}$
$B' = \{g \in G \mid g\,\mathrm{I}m \text{ valamennyi } m \in B\text{-re}\}$,
Tehát A' az A elemeinek közös tulajdonságait jelöli, B' pedig minden G-beli elemek összességét, amelyek rendelkeznek valamennyi B-beli tulajdonsággal. Az A halmazt az (A, B) fogalom **objektumrészének** vagy **extenziójának**, míg a B halmazt az (A, B) fogalom **tulajdonságrészének** vagy **intenziójának** nevezzük. A fogalmak között definiálhatunk egy részbenrendezést a következőképpen: $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$, ha $A_1 \subseteq A_2$ (ekkor $B_2 \subseteq B_1$ is teljesül). A (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalmak összessége a fenti rendezésre nézve teljes hálót alkot, amelyet $\mathcal{L}(G, M, I)$-vel jelölünk és amelyet **fogalomhálónak** nevezünk.

Vezessük be a további eredményekhez nélkülözhetetlen fogalmakat a [7] cikk alapján:

2.1 Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus és $P = \{G_j \mid j \in J\}$ a G egy partíciója. Azt mondjuk, hogy a P partíció a G halmaz egy **extenzió-partíciója**, ha $G_j'' = G_j$ teljesül minden $j \in J$-re (azaz a G_j blokkok zártak közös tulajdonságaikra nézve).

2.2. Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus. Egy $E \subseteq G$ halmazt **doboz-extenziónak** nevezünk, ha E a kontextus valamely extenzió-partíciójának egy osztálya vagy $E = \varnothing''$.

Vezessük be az alábbi fogalmakat [V3] megfelelő definíciói alapján.

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, melynek van legnagyobb eleme $1 \in P$ és legyen $T \subseteq P$, $T \neq \emptyset$ egy részhalmaza. Tekintsük az alábbi feltételeket:

$$[t) \cap T \text{ lánc bármely } t \in T\text{-re;} \tag{1}$$
$$[x) \cap T \text{ (nemüres) lánc bármely } x \in P \setminus \{0\}\text{-ra.} \tag{2}$$

2.3. Definíció. (i) A T halmazt **irányított erdőnek** nevezzük, ha teljesíti az (1) feltételt. T **irányított fa**, ha irányított erdő és $1 \in T$ is teljesül.

(ii) T-t **osztályozási fának** nevezzük, ha teljesíti a (2) feltételt és $1 \in T$. T **maximális osztályozási fa**, ha nem valódi részhalmaza egyetlen más osztályozási fának sem.

Vezessük be most a $\rho \subseteq P^2$ relációt a következőképpen:
bármely $a, b \in P$-re

$$a \rho b \Longleftrightarrow a \leq b \text{ vagy } b \leq a \text{ vagy } a \wedge b = 0.$$

Könnyen belátható, hogy ρ reflexív és szimmetrikus, vagyis egy úgynevezett **tolerancia reláció**.

2.4. Definíció. Legyen P egy nemüres halmaz, $B \subseteq P$ és R egy tolerancia reláció B-n, akkor:
(i) B-t **tolerancia előosztálynak** nevezzük, ha minden $x, y \in B$-re xRy.
(ii) B tolerancia előosztályt **tolerancia osztálynak** nevezzük, ha B maximális az előző tulajdonságra nézve, azaz minden egyéb $z \notin B$-re létezik $b \in B$ úgy, hogy $(z, b) \notin R$.

2.5. Tétel. *Legyen $(P, \leq)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz és $T \subseteq P$ egy nemüres részhalmaza. Akkor ekvivalensek az alábbi állítások:*
(i) T egy irányított fa és $T \cup \{0\}$ $\wedge-$részfélhálója $(P, \leq)$-nek;
(ii) T egy osztályozási fa;
(iii) T egy ρ előosztály, amely tartalmazza az 1-elemet.

Az alábbi definíció alapjául a [4] cikk szolgált.

2.6. Definíció. Legyen L egy háló, amely tartalmaz legkisebb 0 elemet. Egy X részhalmazát L-nek **CD-independensnek** nevezzük, ha bármely $x, y \in X$-re $x \leq y$ vagy $y \leq x$ vagy $x \wedge y = 0$. Azaz bármely két eleme X-nek összehasonlítható (angolul comparable) vagy diszjunkt (disjoint), innen ered az elnevezése a halmaznak. A maximális CD-independens részhalmazokat **CD-bázisoknak** nevezzük.

2.7. Állítás. *Legyen L egy korlátos háló, amelynek legkisebb elemét 0-val jelöljük és $T \subseteq P$ egy nemüres részhalmaza. Akkor ekvivalensek az alábbi állítások:*
(i) T egy CD-bázis L-ben;
(ii) T a ρ reláció egy tolerancia osztálya;
(iii) T egy maximális osztályozási fa.

2.8. Definíció. Legyen L egy teljes háló, amely tartalmazza a legkisebb 0 elemet is. L nemzéró elemeinek az $O = \{a_i \mid i \in I\}$, $I \neq \varnothing$ halmazát L egy **ortogonális rendszerének** nevezzük, ha $a_i \wedge a_j = 0$, $i \neq j$. O egy **teljes ortogonális rendszer**, ha nem létezik olyan ortogonális rendszer, amely őt tartalmazza. (A $\{0\}$ szntén ortogonális rendszernek tekintjük.) Az ortogonális rendszerek halmazán, $Ort(L)$, értelmezhetünk egy rendezési relációt úgy, hogy ezzel a részbenrendezéssel egy hálót alkot, azaz $(Ort(L), \leq)$ szintén egy háló.

A [V3] és [11] cikkekben bizonyítást nyert a következő tétel:

2.9. Tétel. *Legyen L véges háló és T egy osztályozási fa L-ben. Akkor* (i) *T-hez található egy olyan $\mathcal{C} = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ lánc* $\mathrm{Ort}(L)$*-ben amelyre $T = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$.*
(ii) *Ha T egy CD-bázis (azaz egy maximális osztályozási fa), akkor $\mathcal{C}$ egy maximális lánc* $\mathrm{Ort}(L)$*-ben és $|T| = |\mathcal{C}|$.*

2.2. Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában

2.10. Definíció. Egy $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Ext}(G, M, I)$ osztályozási fát **teljes osztályozási fának** nevezzük, ha minden maximális $\{E_i|\ i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ antilánc esetén $\bigcup_{i\in I} E_i = G$. Ha ezenfelül $\mathcal{T}$ nem valódi részhalmaza egyetlen teljes osztályozási fának sem, akkor **maximális teljes osztályozási fának** nevezzük.

Azonnal észrevehető, hogy egy ilyen $\mathcal{T}$ teljes, „műszaki”, osztályozási fa minden eleme egy doboz-extenzió, azaz $\mathcal{T}$ valójában egy a doboz-extenziók hálójából kiválasztott osztályozási fa.

2.11. Állítás. *Legyen (G, M, I) egy véges kontextus,* $\mathrm{Ext}(G, M, I)$ *a kontextushoz tartozó extenziók hálója és $\mathcal{B}(G, M, I)$ pedig a hozzá tartozó doboz-extenziók hálója, akkor ekvivalensek a következő állítások:*
(i) *$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Ext}(G, M, I)$ egy teljes osztályozási fa;*
(ii) *$\mathcal{T}$ egy osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$-ben és minden maximális $\{E_i|\ i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ antilánc egy teljes ortogonális rendszer $\mathcal{B}(G, M, I)$-ben.*

2.12. Következmény. *$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(G, M, I)$ akkor és csakis akkor egy maximális osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$ doboz-extenzió hálóban, ha $\mathcal{T}$ egy maximális teljes osztályozási fa az* $\mathrm{Ext}(G, M, I)$ *hálóban.*

A továbbiakban megmutatom, hogy egy elemi kontextusbővítés során a keletkező új doboz-extenzió háló valamennyi osztályozási fája megkapható az eredeti szűkebb kontextus doboz-extenzió hálójának osztályozási fáinak a módosításával.

2.13. Tétel. *Legyen $K_H = (H, M, I \cap H \times M)$ a $(G,\ M, I)$ véges kontextus egy részkontextusa úgy, hogy $H = G \setminus \{z\}$, $z^{\square\square} \neq \{z\}$ és legyen $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa a $\mathcal{B}(K_H)$ hálóban. Akkor igazak az alábbi állítások:*
(i) *$\mathcal{T}^{(1)} = \{E \in \mathcal{T}|\ E \in \mathcal{B}(G, M, I)\}$ egy rendezésideál $\mathcal{T}$-ben és $\mathcal{T}^{(2)} = \{E \in \mathcal{T}|\ E \cup \{z\} \in \mathcal{B}(G, M, I)\}$ egy véges lánc $\mathcal{T}$-ben és $\mathcal{T}^{(1)} \cap \mathcal{T}^{(2)} = \emptyset$;*
(ii) *$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^{(1)} \cup \big\{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}^{(2)}\big\}$ egy osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$-hálóban.*
(iii) *Ha $\mathcal{T}$ a $\mathcal{B}(K_H)$ háló minden atomját tartalmazza, akkor $\mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$ egy olyan osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$-ben ami annak ugyancsak minden atomját tartalmazza.*

2.14. Tétel. *Legyen* $K_H = (H, M, I \cap H \times M)$ *a* $K_G = (G, M, I)$ *véges kontextus egy részkontextusa úgy, hogy* $H = G \setminus \{z\}$, $z^{\Box\Box} \neq \{z\}$. *Akkor igazak az alábbi állítások:*
(i) *Minden* $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{B}(K_G)$ *osztályozási fához található egy olyan* $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{B}(K_H)$ *osztályozási fa, amire* $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_H^*$ *teljesül.*
(ii) *Ha* $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{B}(K_G)$ *maximális osztályozási fa, akkor* $\mathcal{B}(K_H)$*-ban is létezik egy olyan* $\mathcal{M}$ *maximális osztályozási fa, hogy* $\mathcal{T}_G = \mathcal{M}^*$ *teljesül.*

2.3. Durva halmazok

Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon és jelölje $R(x)$ azon $y \in U$ elemek halmazát, amelyekkel x relációban áll, azaz legyen $R(x) = \{y \in R \mid x\,R\,y\}$. Legyen $X \subseteq U$ egy részhalmaz, akkor X **alsó approximációja** és **felső approximációja** a következőképpen definiálható:

$$\begin{aligned} X^{\blacktriangledown} &= \{x \in U \mid R(x) \subseteq X\}, \\ X^{\blacktriangle} &= \{x \in U \mid R(x) \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Definiálhatunk egy relációt U részhalmazai között is: azt mondjuk, hogy az X és Y halmaz akkor **durván ekvivalens**, jelölése $X \equiv Y$, ha az alsó és felső approximációjuk ugyanaz, tehát ha $X^{\blacktriangledown} = Y^{\blacktriangledown}$ és $X^{\blacktriangle} = Y^{\blacktriangle}$. A $\equiv$ ekvivalencia reláció, amelynek az ekvivalencia osztályait **durva halmazoknak** nevezzük. Azaz $X \equiv Y$ azt jelenti, hogy (a megkülönböztethetőség alapján) ugyanazok az elemek tartozhatnak X-hez és Y-hoz.
A durva halmazok definiálhatóak approximációikkal, azaz bármely $X \subseteq U$ esetén egy durva halmaz így reprezentálható:

$$\mathcal{A}(X) = (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}).$$

Tehát a durva halmazok összessége a következőképpen írható fel:

$$RS = \{(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) \mid X \subseteq U\}.$$

RS-en bevezethetünk egy részbenrendezést a következőképpen:

$$(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) \leq (Y^{\blacktriangledown}, Y^{\blacktriangle}) \iff X^{\blacktriangledown} \subseteq Y^{\blacktriangledown} \text{ és } X^{\blacktriangle} \subseteq Y^{\blacktriangle}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, ahol a legkisebb elem $\mathcal{A}(\emptyset) = (\emptyset^{\blacktriangledown}, \emptyset)$, a legnagyobb elem pedig $\mathcal{A}(U) = (U, U^{\blacktriangle})$.

Sikerült bebizonyítanunk, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok egy hálót alkotnak, mégpedig:

2.15.Tétel. *Ha* R *egy kvázirendezés a nemüres* U *halmazon, akkor* $\mathcal{RS}$ *egy teljes részhálója a* $\wp(U) \times \wp(U)$ *hálónak.*

2.16. Következmény. *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $\mathcal{RS}$ egy teljesen disztributív teljes háló, melyben*

$$\bigwedge_{i\in I}\mathcal{A}(X_i) = \left(\bigcap_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}, \bigcap_{i\in I} X_i^{\blacktriangle}\right), \textit{és} \bigvee_{i\in I}\mathcal{A}(X_i) = \left(\bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}, \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangle}\right)$$

minden $\{A(X_i)|i \in I\} \subseteq RS$ esetén.

Az alábbi állításokban bemutatjuk a durva halmazok hálójának néhány jellegzetes tulajdonságát.

Jelöljük X^c-vel az X halmaz komplementumát $U \setminus X$-et, akkor könnyen beláthatók az alábbi egyenlőségek:

$$X^{\blacktriangle c} = X^{c\blacktriangledown} \text{ és } X^{\blacktriangledown c} = X^{c\blacktriangle}. \qquad (1)$$

Értelmezzük a következő leképzést a durva halmazok hálóján:

$$c : RS \longrightarrow RS,\ \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X^c).$$

Mivel $c((X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})) = (X^{c\blacktriangledown}, X^{c\blacktriangle}) = (X^{\blacktriangle c}, X^{\blacktriangledown c})$ minden $X \subseteq U$ esetén, ezért a c leképzés jól definiált. Könnyen belátható az is, hogy $\mathcal{A}(X) \leq \mathcal{A}(Y) \Longrightarrow \mathcal{A}(Y^c) \leq \mathcal{A}(X^c)$ ami azt jelenti, hogy c egy rendezésfordító leképzés $\mathcal{RS}$-en.
Minden $\alpha, \beta \in RS$ esetén

$$\begin{aligned} c(\alpha \vee \beta) &= c(\alpha) \wedge c(\beta) \\ c(\alpha \wedge \beta) &= c(\alpha) \vee c(\beta) \\ c(c(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Másszóval c egy **de Morgan** művelet az $\mathcal{RS}$ teljes hálón.

Legyen L egy disztributív háló, amin értelmezett egy c de Morgan művelet. Amennyiben minden $x, y \in L$-re teljesül az

$$x \wedge c(x) \leq y \vee c(y) \qquad (4)$$

egyenlőtlenség, akkor a $\mathbb{K} = (L, \wedge, \vee, c)$ algebrát **Kleene algebrának** nevezzük.

2.17. Állítás. *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $(\mathcal{RS}, \cap, \cup, c)$ egy Kleene algebra.*

Legyen L egy háló amelynek a legkisebb eleme a 0. Egy x^* elemet az $x \in L$ **pszeudokomplementumának** nevezünk, ha $x \wedge x^* = 0$ és minden $a \in L$-re, $x \wedge a = 0$-ból következik, hogy $a \leq x^*$. Minden elemnek legfeljebb egy pszeudokomplementuma lehet. Egy hálót **pszeudokomplementumosnak** nevezünk, ha minden elemének van pszeudokomplementuma. Legyen L egy háló amelynek a legnagyobb eleme az 1. Az x^+ elemet az $x \in L$ elem **duális pszeudokomplementumának** nevezzük, ha $x \vee x^+ = 1$ és $x \vee y = 1$-ből következik, hogy $x^+ \leq y^+$.

2.18. Állítás. *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $\mathcal{RS}$ és a duálisa $\mathcal{RS}^d$ is pszeudokomplementumos háló.*

Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon és R^{-1} az inverz relációja. Akkor R^{-1} esetén is definiálható $X \subseteq U$ alsó és felső approximációja, amit az $X^{\triangledown}$ és $X^{\triangle}$ szimbólumokkal jelölünk. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} X^{\triangledown} &= \{x \in U \mid R^{-1}(x) \subseteq X\} \\ X^{\triangle} &= \{x \in U \mid R^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

2.19. Állítás. *Az $\mathcal{RS}$ hálóban minden $X \subseteq U$ esetén a pszeudokomplementum a következő*

$$\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle c}).$$

2.20. Állítás. *Az $\mathcal{RS}$ hálóban minden $X \subseteq U$ esetén a duális pszeudokomplementum a következőképpen adható meg*

$$\mathcal{A}(X)^+ = \mathcal{A}(X^{\blacktriangledown\triangledown c}).$$

Az alábbi tételben szükséges és elégséges feltételt bizonyítottam arra nézve, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója Stone háló legyen.

2.21.Tétel. *Legyen R egy kvázirendezés az U univerzumon. $\mathcal{RS}$ akkor és csakis akkor Stone háló, ha $R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}$.*

3. Új tudományos eredmények

3.1. Osztályozási fák és CD-independens halmazok

A fogalomanalízisben és az informatikában is régóta ismert az osztályozási fa fogalma. A műszaki gyakorlatban egy osztályozási fát az objektumoknak (alkatrészeknek) egyre finomabb osztályozási rendszereinek a láncaként kapunk meg. Az osztályozási fa fogalmát általánosítottam úgy, hogy az részbenrendezett hamazokban is értelmezhető.

Kiindulva a Czédli Gábor által bevezetett CD-independens halmaz fogalmából, megvizsgáltam hogy ezek milyen kapcsolatban állnak egy korlátos hálóban definiált maximális osztályozási fákkal, illetve egy általam bevezetett speciális tolerancia osztályaival. A 2.9 tételből kiindulva kidolgoztam egy algoritmust ami a doboz-extenziók hálójában ortogonális rendszerek egy láncából hoz létre osztályozási fát.

A 2.7 Tétel, 2.9 Állítás és 2.11 Tétel alapján az alábbi tézist állítom fel:

1. Tézis:
Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg és bizonyítottam az osztályozási fák és CD-bázisok közötti kapcsolatról. Kidolgoztam és hatékonyság szempontjából elemeztem egy olyan algoritmust, ami ortogonális rendszerek segítségével hoz létre osztályozási fákat.

Az 1. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 3. fejezete, illetve [V2] ,[V3] és a [V4] publikációk tartalmazzák.

3.2. Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában

A B. Ganter, A. Körei, S. Radeleczki [7] cikkükben tanulmányozták hogyan változik a dobozháló, ha a kontextust egy elemmel bővítjük. Megvizsgálták, hogy egy kontextus doboz-extenziói milyen esetben maradnak doboz-extenziók az új kontextusban. A matematikai eredményekből kiindulva algoritmust dolgoztak ki a dobozháló inkrementális felépítésére. Ezekből az eredményekből kiindulva definiáltam a teljes osztályozási fát (műszaki értelemben vett osztályozási fát), melyről megmutattam, hogy minden eleme doboz-extenzió, azaz valójában megegyezik egy a doboz-extenziók hálójából kiválasztott osztályozási fával. Bebizonyítottam, hogy egy elemi kontextusbővítés során a keletkező új doboz-extenzió háló valamennyi osztályozási fája megkapható az eredeti, szűkebb kontextus doboz-extenzió hálójának az osztályozási fáiból azok módosításával. A módszer hatékonyságát az biztosítja, hogy elég ismernünk az eredeti dobozháló egy osztályozási fáját, illetve ennek doboz-extenzióit, nincs szükségünk a bővített kontextushoz tartozó új dobozháló elemeire (egy kivételével, ami az új elem doboz-extenziója).

A disszertáció 3.5 fejezetének eredményei alapján a következő tézist fogalmazom meg:

2. Tézis:
Megvizsgáltam a kontextus szűkítésének és bővítésének hatását az osztályozási fákra a doboz-extenziók hálójában. Igazoltam, hogy egy elemi bővítés után az új kontextus doboz-extenzió hálójának valamennyi osztályozási fája megkonstruálható a régi kontextushoz tartozó osztályozási fák módosításával. Algoritmust dolgoztam ki egy elemi bővítés során kapott kontextus osztályozási fáinak megkonstruálására.

3.3. Durva halmazok

A durva halmazok szakirodalmának alapos áttekintése után, bebizonyítottam, hogy egy kvázirendezéssel definiált durva halmazok egy teljesen disztributív teljes hálót alkotnak. Megmutattam, hogy ez nem egy komplementumos háló, de három, a komplementumképzés műveletéhez hasonló, unáris művelet is definiálható rajta. Szükséges és elégséges feltételt adtam meg arra nézve, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója mikor lesz Stone háló.

A disszertáció 4.3 és 4.4 fejezetének eredményei alapján a következő két tézist fogalmazom meg:

3. Tézis:
Bebizonyítottam, hogy egy kvázirendezéssel definiált durva halmazok teljesen disztributív teljes hálót alkotnak. Ez a háló egy rajta természetes módon definiált de Morgan művelettel együtt egy Kleene algebrát alkot.

4. Tézis:
Megfogalmaztam és bizonyítottam annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója Stone hálót alkosson. Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg a háló tulajdonságaira vonatkozóan.

Az 3. Tézis és 4. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 4. fejezete, illetve [V1] publikáció tartalmazza.

Felhasználva a durva halmazok elmélete és a fogalomanalízis közötti kapcsolatot, a modális operátoroknak egy csoporttechnológiai alkalmazását mutatjuk be. Az alkatrészek gyártását nagyban megkönnyíti, ha az alkatrészeket meghatározott rendszer szerint csoportosítjuk. A csoportok kialakításánál számításba kell venni az alkatrészek méreteit, a geometriai alakját, a megmunkálandó felületek azonosságát, a nyersdarabok hasonlóságát, a megmunkálás gazdaságosságát, a legyártandó alkatrészmennyiséget. Az alkatrészcsoportok kialakításánál egy olyan jellegzetes alkatrészből indulunk ki, amely az adott csoport összes tulajdonságait tartalmazza. A komplex alkatrész megtervezésénél abból kell kiindulni, hogy a csoport minden alkatrészét ugyanazzal a technológiai folyamattal lehessen megmunkálni, azonos vagy fokozatos gépbeállítással és azonos típusú szerszámokkal. A gondolatmenet egyszerű: egy kontextusban eltároljuk a legyártandó alkatrészeket (objektumokat) és ezek tulajdonságait. Megszerkesztem a kontextushoz tartozó komplementer kontextust (akár azt is mondhatnánk, hogy a kontextus ellentettjét) és megkeresem ennek a legfinomabb extenzió-partícióit. Következő lépésként megkeressük a legfinomabb extenzió-partíció elemeinek a tulajdonságait az eredeti kontextusban és utolsó lépésként megkapjuk a komplex alkatrészt, amely egy olyan virtuális vagy valós alkatrész, amelynek tulajdonságai nem mások, mint az előzőleg meghatározott tulajdonsághalmaz elemei.

A disszertáció 5.3 fejezetének eredményei alapján a következő tézist fogalmazom meg:

5. Tézis:
Kidolgoztam egy módszert és egy algoritmust, amely egy alkatrész-tulajdonság típusú kontextusból kiindulva modális operátorok segítségével meghatározza az adott alkatrészhalmazhoz tartozó komplex alkatrészeket.

Az 5. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 5.3 fejezete illetve [V9] publikáció tartalmazza.

4. Summary

This PhD dissertation contains new results about classification trees, elementary extensions of a context and rough sets determined by quasi-order relations. We give also some algorithms for the construction of a classification tree in the lattice of box extents. The effect of an elementary context extension on the lattice of box extents of a context and on the classification trees corresponding to this lattice is also studied. We also show an application of the modal operators (defined in rough set theory) in Group Technology for finding complex components.

Thesis 1 : Classification trees and CD-independent sets

I formulated and demonstrated some equivalent assertions concerning the relation between classification trees and CD-bases. I evaluated and analized for efficiency an algorithm for constructing classification trees by using orthogonal systems.

Thesis 2 : Classification trees in the lattice of box extents of a context

I have studied the effect of elementary extension and reduction of a context on classification trees in the lattice of the box extents of the context. In the case of an elementary context extension, I have elaborated an algorithm which constructs the classification trees of the lattice of box extents of the new context by modifying the classification trees belonging to (box extents lattice of) the old context.

Thesis 3 : Rough sets defined by a quasiorder relation

I proved that the rough sets defined by a quasiorder relation form a completely distributive complete lattice. This lattice together with a de Morgan operation defined on it (in a natural way) is a Kleene algebra.

Thesis 4: The Stone lattice of rough sets defined by a quasi-order relation

I answered the question when the rough sets determined by a quasi-order form a Stone lattice. I formulated and proved some equivalent assertions concerning the properties of this lattice of rough sets.

Thesis 5: The application of modal operators

As an application to Group Technology problems, I developed a new method and an algorithm, based on modal operators defined on a context, for determinig the complex components corresponding to a manufacturing process.

Az értekezés témakörében készített saját publikációk

[V1] Järvinen J., Radeleczki S., Veres L.: *Rough sets determined by quasiorders.* Order 26 (2009), 337-355. (IF=0,333)

[V2] Veres L.: *CD-independent sets and orthogonal systems.* Tavaszi Szél konferenciakiadvány 2010, Pécs, 611-612;

[V3] Veres L.: *Generalization of classification trees for a poset.* Creative Mathematics and Informatics, Vol.17, 2008, 72-77;

[V4] Veres L.: *Classification trees and orthogonal systems.* microCAD 2007 International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2007, 63-68;

[V5] Veres L.: *Zárt halmazok hálójának néhány sajátossága.* Tavaszi Szél konferenciakiadvány 2007, Budapest, 2007, 340-344;

[V6] Veres L.: *Fogalomhálók és osztályozási fák.* microCAD 2006 International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2006, 101-107;

[V7] Veres L.: *Osztályozási fák részbenrendezett halmazokban.* Doktoranduszok Fóruma Szekciókiadvány, Miskolc, 2006, 240-245;

[V8] Veres L.: *Fogalomhálók és osztályozási fák.* Doktoranduszok Fóruma Szekciókiadvány, Miskolc, 2005, 238-243.

[V9] Radeleczki S., Tóth T., Veres L.: *Modal operators in Group Technology.* (manuscript)

[V10] Veres L.: *Elemi kontextusbővítés és osztályozási fák.* (manuscript)

Hivatkozott irodalom

[1] Cormen T. H., Leiserson C. E. , Rivest R. L.: Algoritmusok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.

[2] Czédli G.: Hálóelmélet. Egyetemi jegyzet, JATE, Szeged, 1996.

[3] Czédli G. and Schmidt E. T.: CDW-independent subsets in distributive lattices, Acta Sci. Math. (Szeged) 75 (2009), 49-53.

[4] Czédli G., Hartmann M. and Schmidt E.T.: CD-independent subsets in distributive lattices, Publicationes Mathematicae Debrecen, 74/1-2 (2009), 127-134.

[5] Davey B. A., Priestley H. A.: Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[6] Ganter B., Wille R.: Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1999).

[7] Ganter B., Körei A., Radeleczki S.: Extent partitions and context extensions. (in print)

[8] Gehrke M., Walker E.: On the structure of rough sets, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 40, 1992, 235-245

[9] Grätzer G.: General Lattice Theory. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2003.

[10] Hassanien A.E., Suraj Z., Slezak D., Lingras P. (eds): Rough Computing: Theories, Technologies and Applications, Information Science Reference, Hershey-New York, 2008

[11] Horváth E. K. and Radeleczki S.: A note on CD-independent subsets (manuscript)

[12] Iwiński T.B.: Algebraic approach to rough sets. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 35, 1987, 673-683

[13] Jouni Järvinen: Rough sets defined by tolerances, Software technology. Proceedings of the Fenno-Ugric Symposium, August 19-21, 1999, Sagadi, Estonia, pp. 247-257.

[14] Jouni Järvinen: The ordered set of rough sets, Rough Sets and Current Trends in Computing 2004, Lecture Notes in Artificial Intelligence 3066 (Springer, Heidelberg 2004) pp. 49-58.

[15] Jouni Järvinen: Properties of Rough Approximations, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Vol.9,No.5, 2005

[16] Kovács L.: Algorithms for Building Concept Set and Concept Lattice. Production Systems and Information Engineering, 1, 2003, 91-106.

[17] Kovács L.: Generating Decision Tree from Lattice for Classification. Proceeding of ICAI07, Eger, 2007, 377-385.

[18] Körei A., Radeleczki S.: Box elements in a concept lattice. Contribution to ICFCA 2006, Editors Bernhard Ganter, Leonard Kwuida, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Drezda 2006.

[19] Körei A.: Fogalomhálók alkalmazása osztályfelbontási problémákra. PhD értekezés, Miskolc, 2008

[20] Mitrofanov Sz.P.: A csoportmegmunkálás technológiai alapjai. Műszaki könyvkiadó, 1962.

[21] Pawlak Z.: „Rough Sets", International Journal of Computer and Information Sciences 5, pp. 341-356, 1982.

[22] Pomkała J., P Pomkała J.A.:The Stone Algebra of Rough Sets, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 36 (1988) 495–512.

[23] Radeleczki S.: Fogalomhálók és alkalmazásuk a csoporttechnológiában. microCAD International Scientific Conference, Miskolc, 1999, 3-8.

[24] Radeleczki S.: Classification systems and the decomposition of a lattice into direct products. Mathematical Notes, Vol.1. No.1, 2000, 145-156.

[25] Radeleczki S.: Classification systems and their lattice. Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applicationes 22, 2002, 167-181.

[26] Radeleczki S., Tóth T.: Fogalomhálók alkalmazása a csoporttechnológiában. Osztályozórendszerek matematikai alapjainak összehasonlító vizsgálata. Kutatási jelentés, Miskolci Egyetem, 2001.

[27] Srejder Ju. A.: Egyenlőség, hasonlóság, rendezés. Gondolat (1975), Budapest.

[28] Szász G.: Hálóelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[29] Wille R.: Subdirect decomposition of concept lattices. Algebra Universalis 17, 1983, 275-287.

[30] Yao Y. Y., Lin T. Y.: Generalization of Rough Sets using Modal Logics, Intelligent Automation and Soft Computing 2, pp. 103-120, 1996.

[31] Yao, Y.Y.: On generalizing rough set theory, Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing, Proceedings of the 9th International Conference (RSFDGrC 2003), LNAI 2639, pp. 44-51, 2003.

[32] Yao Y. Y., Chen Y.H.: Rough Set approximations in formal concept analysis, Journal of Transactions on Rough Sets, V, LNCS 4100, 2006, 285-305.