Miskolci Egyetem

Gépészmérnöki és Informatikai Kar

Nemlineáris peremérték problémák megoldásainak vizsgálata és néhány folyadék mechanikai alkalmazás

PhD értekezés

Készítette:
Szilvásiné Rozgonyi Erika

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Doktori iskola vezető:
Prof. Dr. Tóth Tibor
A műszaki tudomány doktora

Tudományos vezető:
Vadászné Dr. habil Bognár Gabriella
A matematikai tudomány kandidátusa

Miskolc, 2011

A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A témavezető ajánlása

Szilvásiné Rozgonyi Erika:
"Nemlineáris peremértékproblémák megoldásainak vizsgálata és néhány folyadék mechanikai alkalmazás" című PhD értekezéséhez

Szilvásiné Rozgonyi Erika 2004-ben kezdte el részletesen vizsgálni a lineáris és nemlineáris differenciálegyenletek numerikus és analitikus megoldásait, nevezetesen a perem- illetve a kezdetiérték problémák megoldhatóságát, a megoldások számosságát és a közelítő megoldások előállítását.

A 2004 és 2010 közötti időszakban, ebben a témakörben végzett kutatásairól 4 folyóirat cikk jelent meg, konferenciákon tartott előadásai alapján pedig 11 dolgozat konferencia kiadványban került publikálásra. A folyóiratcikkek mindegyike nemzetközi, a SCOPUS adatbázisban nyilvántartott folyóiratban jelent meg és a dolgozatok közül kettő impakt faktorral rendelkező folyóiratban került közlésre, az impakt faktorok összege: 2,782. A folyóiratcikkekre eddig 9 külföldi hivatkozás ismert.

Az értekezés az elmúlt évek sikeres publikációs tevékenysége alapján készült, amelyben a jelölt foglalkozik az általánosított hipergeometrikus függvényekkel, azok hatványsor alakú közelítésével, egy hárompontos peremértékfeladat megoldásaival, megadja a megoldások létezésének szükséges és elégséges feltételét, megvizsgálja a többszörös megoldások létezésének feltételeit. Továbbá két fizikai alkalmazást vizsgál: az egyikben viszkózus folyadék lamináris áramlásakor fellépő hővezetést és hőfejlődést tekinti egyenes csőben hőmérséklettől függő viszkozitás esetén, a másikban pedig egy nemlineáris reakció-diffúzió problémához a lokális megoldás létezésére feltételt ad és meghatározza a megoldásokat.

Az értekezés Szilvásiné Rozgonyi Erika önálló eredményeit tartalmazza és a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola szabályzatában megkövetelt követelményeknek mindenben megfelel.

A fentiek alapján a jelölt számára a PhD cím odaítélését messzemenően támogatom.

Miskolc, 2011. április 8.

Vadászné Dr. Bognár Gabriella
tudományos vezető

Köszönetnyilvánítás

Az értekezés a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola keretein belül 2004-ben kezdett kutatómunkám eredményeit foglalja össze. Ezúton szeretnék köszönetet mondani tudományos vezetőmnek, **Vadászné Dr. Bognár Gabriellának**, aki már korábban megismertetett a differenciálegyenletek mélyreható elméletével és kutatómunkám irányítását is készséggel vállalta. Együttműködésünk során nagyon sok szakmai és baráti tanáccsal látott el, számomra is elérhető célokat tűzött ki elém. Az értekezésem matematikai eredményeinek kidolgozásában szakmai tudásával nagyon nagy segítséget nyújtott és ő az, aki nélkül ez a disszertáció soha nem készülhetett volna el.

Továbbá szeretném megköszönni **Dr. Marossy Kálmánnak**, aki a dolgozatban szereplő folyadék mechanikai részhez tartozó elméleti összefüggések megértésében illetve a kísérletek elvégzésében óriási segítséget nyújtott.

A Miskolci Egyetem Analízis és Alkalmazott Matematika Tanszékein dolgozó kollégáimnak is köszönettel tartozom, mert támogatták tanulmányaimat, szakmailag segítették munkámat és lehetővé tették dolgozatom megírását.

Végül szeretném megköszönni családomnak, barátaimnak azt, hogy mindenben segítettek, lelkesen bíztattak és végig mellettem álltak.

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

Az értekezés a matematika egy széles körben kutatott ágával a nemlineáris differenciálegyenletek peremérték feladataival, azok megoldásainak tulajdonságaival és meghatározásával foglalkozik. Az elért eredmények között sok olyan található, amelyeket a matematika egyéb ágaiban, a mechanikában, valamint az informatika területén is fel lehet használni.

Az ilyen eredmények száma egyre növekszik, az alkalmazások lehetősége egyre szerteágazóbb. Például a számítástudomány több nagy területén kifejezetten meghatározó szerep jut a differenciálegyenleteknek. De meg kell említenünk még a természetben lejátszódó jelenségek, a biológiai, fizikai, kémiai folyamatok, sőt a mechanikai mozgások matematikai modelljéül szolgáló differenciálegyenletek fontosságát is.

A dolgozat vezérfonalát adott feladatok megoldásainak hatványsor alakú felírásai adják, amelyek meghatározására módszert adunk és ezen megoldásokat konkrét példákon és ábrákon keresztül is szemléltetjük. A dolgozat az úgynevezett általánosított hipergeometrikus függvények hatványsor alakú előállítását, valamint egy hárompontos peremérték feladat megoldhatóságának feltételeit tartalmazza. A második részben két alkalmazás található. Az egyik egy konkrét fizikai alkalmazás, mely kísérleteken alapszik és a kísérletekkel már nem mérhető értékeket szolgáltatja. A másik alkalmazás a reakció-diffúzió egyenletek köréhez kapcsolódó probléma.

A disszertációt az előzetesen önállóan, illetve társszerzőkkel közösen készített 15 már megjelent cikk és a konferenciákon tartott előadások alapján állítottuk össze. A dolgozatok egy része nemzetközi, referált (és impakt faktorral rendelkező) folyóiratban, hazai és külföldi konferencia kiadványokban jelentek meg.

1.1 A dolgozat felépítése

Az értekezés első fejezete a bevezető, mely az irodalmi áttekintés és a dolgozat rövid összefoglalása mellett a kutatás célkitűzéseit tartalmazza.

A második fejezetben hipergeometrikus függvényekkel foglalkozunk, melyeknek többféleképpen megadjuk az általánosításukat is. Vizsgáljuk az általunk felírt általánosított hipergeometrikus függvényeket előállító nemlineáris differenciálegyenletek tulajdonságait, majd ezen függvényeket hatványsor alakban írjuk fel, úgy, hogy módszert adunk a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására. Rendszerezzük, hogy az adott differenciálegyenlethez milyen kezdeti feltételek mellett milyen megoldásokat kapunk. Az adott numerikus számításokat MAPLE-ben írt programokkal végezzük el.

Több példán keresztül mutatjuk meg az eljárás módszerét és a megoldásokat Descartes-féle koordináta-rendszerben is ábrázoljuk, majd összehasonlítjuk a numerikus és az analitikus eredményeket.

A harmadik fejezetben egy hárompontos peremérték feladat megoldásait vizsgáljuk, ahol megadjuk a megoldások létezésének szükséges és elégséges feltételét homogén és inhomogén esetben is. Definiáljuk a feltételekhez szükséges halmazokat, függvényeket, melyeket FORTRAN nyelven illetve MATLAB-ban megírt programokkal szemléltetünk. Megvizsgáljuk a többszörös megoldások létezésének feltételeit. Több példát mutatunk be a többszörös megoldások szemléltetésére a feladatban szereplő feltételek figyelembe vételével. A példákban lévő megoldásfüggvények viselkedését ábrákkal szemléltetjük. Az ábrákat több MATHEMATICA-ban megírt programmal ábrázoljuk.

A disszertáció negyedik fejezete néhány folyadék mechanikai alkalmazást tárgyal, viszkózus folyadék lamináris áramlásakor fellépő hővezetést és a viszkozitásból származó hő fejlődését kör keresztmetszetű egyenes csőben. Az egyenletek megoldásában hengerkoordinátákat alkalmazunk. A vizsgált esetben állandósult, nyomás hatására létrejövő áramlással foglalkozunk. Ez a jelenség matematikailag nemlineáris parciális differenciálegyenletekkel modellezhető. Ezen áramlások részletes analízise lehetővé teszi a megfelelő modellek értékelését és a prototipikus ipari folyamatok numerikus előrejelzését. Erős hőmérsékletfüggő viszkozitás esetén nem kívánt jelenségek léphetnek fel a gyártási folyamatok során. A polimer folyadékok reológiai viselkedésének kvantitatív leírása a feldolgozás és a termékek tulajdonságainak szempontjából nagyon fontos kérdés. Ebben a részben elemezzük egy véges hosszúságú hengerben, a nemnewtoni folyadékban létrejövő viszkózus hőfejlődést. A folyamatot leíró peremérték feladat megoldása során vizsgáljuk a folyadék sebesség- és hőmérséklet eloszlását nemnewtoni, hatványfüggvényt feltételező modellre. Célunk az volt, hogy vizsgáljuk a hőmérsékletfüggő viszkozitás hatását a hőmérséklet és a sebesség eloszlására. Bemutatjuk a BRALEN RB 03-23 típusú alacsony sűrűségű polietilén alapanyag reológiai paramétereinek kísérleti meghatározását, a mért értékeket pedig alkalmazzuk a matematikai modellben és meghatározzuk az anyagban létrejövő hőfejlődést. A reológiai jellemzők kiszámítását lehetővé tevő méréseket a BorsodChem Zrt. kazincbarcikai laboratóriumában végeztük el.

Számos kémiai, fizikai, biológiai jelenséget reakció-diffúzió egyenletekkel írhatunk le. Az értekezés ötödik fejezetében egy több paramétert tartalmazó nemlineáris reakció-diffúzió problémát mutatunk be, melynek megadjuk a matematikai modelljét. Lokális megoldás létezésére feltételt adunk és meghatározzuk ezeket a megoldásokat az adott feltételek mellett. Módszert adunk a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására. Ellenőrizzük módszerünk pontosságát. Összehasonlítjuk az egzakt és lokális megoldásokat, majd perturbáció analízist végzünk a feladatban szereplő paraméterértékekre. A paraméterek változásának hatását ábrákkal szemléltetjük. A megoldások meghatározásában MAPLE-ben megírt programokat használunk.

A hatodik fejezetben összefoglaljuk a disszertációban szereplő fontosabb fogalmakat, kimondjuk a dolgozat fontosabb tételeire épülő téziseket és megfogalmazzuk a jövőbeli célkitűzéseket.

A hetedik fejezetben a dolgozat rövid összegzését angol nyelven adjuk meg.

A nyolcadik fejezet egy melléklet, melyben a disszertációban megadott példák megoldásgörbéinek előállítására megírt programok közül hármat mutatunk be.

A disszertáció végén a publikációs jegyzéket, az ismert hivatkozásokat, illetve a felhasznált irodalomjegyzéket találjuk.

1.2 Irodalmi áttekintés

A dolgozat 2. fejezete általánosított hipergeometrikus függvényekkel foglalkozik, melyek már az 1800-as években többféle vonatkozásban jó néhány nagyszerű matematikus cikkében megjelentek. Tudomásunk szerint először Lundberg 1879-ben írt tézisében [48] olvasható a szinusz függvény általánosítása az úgynevezett hipergeometrikus függvényekkel kapcsolatban. Bevezette az egyváltozós goniometrikus függvényeket, mint a

$$\frac{dy}{dx} = (1 \pm y^n)^{m/n}$$

nemlineáris differenciálegyenlet megoldását, amikor m és n egész számok. A megoldásfüggvényt az

$$x = \int_0^y \frac{dy}{(1 - y^n)^{m/n}}$$

alakban adta meg, ami $m = 1$, $y(0) = 0$ esetben megegyezik az általunk tárgyalt általánosított szinusz függvénnyel. Lundberg munkáját Peetre fordította angol nyelvre Lindqvist és Lindqvist segítségével a Lund Egyetemen 2003-ban [46]. Lundberg 1846-ban született Stockholmban és 1879-től haláláig matematika-fizika tanár volt egy helyi gimnáziumban.

1938-ban Levin [42] integrálegyenlőtlenségekkel kapcsolatban foglalkozott az általánosított szinusz függvény bevezetésével és tulajdonságaival.

Később, 1940-ben Schmidt [60] egy bizonyos típusú integrálegyenlőtlenség megoldásaként definiált egy általánosított szinusz függvényt. Ebben a dolgozatban nemcsak magát a függvényt tekinti, hanem vizsgálja annak tulajdonságait is.

Az 50-es évekig elért eredményekről jó áttekintést nyújt Sansone könyve [58], melyet követően a megjelenő cikkek száma gyorsan növekedett. Fontos eredmény volt a 90-es években az a megfigyelés, hogy meglepő hasonlóságok mutatkoznak az oszcillációs viselkedésben a kvázilineáris és a lineáris Sturm-Liouville-féle egyenletek között.

Az úgynevezett féllineáris közönséges differenciálegyenletek megoldásaként 1979-ben Elbert [25] adta meg a szinusz függvény egyfajta általánosítását, melyet nemlineáris parciális differenciálegyenlet peremérték feladatainál alkalmaztak jó néhányan, például Bognár 1992-ben megjelent [9] cikkében alkalmazta kétdimenziós esetben.

A trigonometrikus függvények általánosításával kapcsolatban számos cikk jelent meg, mint például 1999-ben Jaros és Kusano egy jelentős dolgozata [36], melyben másodrendű féllineáris differenciálegyenletek Picone típusú azonosságával kapcsolatban tárgyalta a már említett függvényt. Másik példa trigonometrikus függvények általánosítására Dosly 2001-ben megjelent [20] cikke, ahol a szerző megmutatta, hogy az

$$(r(t)\Phi(x'))' + c(t)\Phi(x) = 0,\ \Phi(x) := |x|^{p-2}x,\ p > 1,$$

féllineáris differenciálegyenlet megoldása sok szempontból hasonlóságot mutat a klasszikus Sturm-Liouville egyenletekhez a speciális $p = 2$ esetre vonatkozóan.

Fontos kihangsúlyoznunk, hogy a kvázilineáris egyenletek megoldásainak tulajdonságai, vizsgálati módszerei általában lényeges eltéréseket mutatnak a lineáris esethez képest.

2005-ben Özbekler és Zafer a Sturm-féle összehasonlítási elméletet terjesztették ki féllineáris impulzív differenciálegyenletekre (lásd [53]).

Kurokawa és Wakayama 2008-as [39] értekezésükben periodikus eltéréseket és a Raabe formulát vizsgálták többek között egyfajta általánosított szinusz függvényre nézve és ezen függvény egy új osztályát vezették be.

2009-ben jelent meg Edmunds és Lang [23] publikációja, melyben összefoglalták, hogy hogyan és milyen sokféleképpen adhatóak meg trigonometrikus függvények általánosítása. Ebben a munkában a szerzők hatféleképpen közelítik meg ezeket a függvényeket, ezek közül néhányat mi is említünk a 2. fejezetben.

A legfrissebb 2010-ben megjelent Rajovic, Dimitrovski, Stoiljkovic és Radosavljevic dolgozata [55], melyben az általuk vett általánosított trigonometrikus függvény zérushelyeinek a számát vizsgálták.

A disszertáció 3. fejezetében egy hárompontos peremérték feladat megoldásainak vizsgálatát tárgyaljuk, ide értve a megoldások létezésének és számosságának meghatározását. Ezen feladatok vizsgálatának háttéréül a Drábek és Milota 2007-ben megjelent könyve szolgált [22], amelyben megtalálhatóak az ilyen típusú peremérték problémák megoldásához szükséges definíciók, tételek és azok bizonyításai. Ilyen például a Rabinowitz és Dancer-féle bifurkációs tétel, amit mi is felhasználunk a 3.6. fejezetben.

A disszertáció ezen részéhez még felhasználásra került Lazer és Leach 1969-ben megjelent közös cikke [41], melyben nemlineáris kétpontos peremértékproblémát tárgyalnak. Egy másik, számunkra fontos tanulmány [40] 1970-ben jelent meg, melynek szerzői -Landesmann és Lazer-lineáris sajátértékekkel és nemlineáris peremérték problémával foglalkoztak. Feltétlenül meg kell említenünk Canada 1987-es szemilineáris peremérték problémát tekintő dolgozatát [15], mely nagyban segítette munkánkat. A 2005-ben megjelent Yongpin [62] publikációjában hárompontos peremérték probléma sajátértékeit keresi. Az itt igazolt tételeket mi is felhasználjuk.

A dolgozat 4. fejezete a folyadék mechanikai alkalmazás címet viseli. McKelvey Polimerek feldolgozása című 1962-ben mérnökhallgatóknak írt könyve alapján vettük a meghatározó egyenleteket [51]. A mű 2. fejezetében bevezeti az olvasót- McKelvey szavaival élve- a deformáció és folyás tudományába, a reológiába. Itt megtalálhatóak a folytonossági, az energia- és az impulzusegyenletek, melyek a folyadék minőségétől független fizikai alaptörvények matematikai formái. Az ide vonatkozó egyenleteket derékszögű-, henger- és gömbi-koordinátákkal bizonyítás nélkül közli. A 2-5. fejezetben az összenyomhatatlan nemnewtoni folyadékok mechanikájának átfogó leírását adja.

A viszkózus folyadék lamináris áramlására szolgáló egyenletek felírásában Lajos [38] Az áramlástan alapjai című munkája is segítséget nyújtott. Ebben a könyvben megtalálható a folyadékok áramlásának leírása, külön tárgyalva a newtoni és a nemnewtoni folyadékokat. A 8. fejezetben leírtak alapján sikerült megérteni és alkalmazni az ide vonatkozó összefüggéseket. Itt találhatjuk a nemnewtoni közegekre vonatkozó mozgásegyenletet, a lamináris áramlás alapdefinícióit és a Navier-Stokes egyenleteket is.

Marossy 1980-ban megírt [49] cikkében a PVC rendszerek gyúrókamrás vizsgálatával foglalkozik, mely a műanyagok és a műanyag keverékek vizsgálatára gyakran alkalmazott eljárás. Ebben a dolgozatban a szerző leírta a vizsgált anyag jellemzőinek megadása után a gyúrókamrában lejátszódó folyamatokat és a gyúrás diagramjainak értékelését. A mérések alapján nagyon sok diagramot készített, ami szintén segítette a felmerülő problémáink megértését. Ezek után olyan anyagok vizsgálati eredményeinek értékelése is lehetővé vált, amelyek gyúrási diagramját a cikk megjelenéséig nem tudták értékelni a szakemberek. Az általunk végzett mérési eredmények kiértékelésekor a [49]-ben alkalmazotthoz hasonló módszert használunk.

Az 5. fejezetben egy nemlineáris reakció-diffúzió problémát mutatunk be. Ezen részben lévő eredményekhez jó alapot nyújtott Herrero és Vazquez 1982-ben írt munkája [32], melyben nemlineáris degenerált parabolikus egyenletekkel és megoldásaikkal foglalkoztak. Egy másik fontos dolgozat Lin és Ni szemilineáris egyenleteket tárgyaló [44] cikke, melyben egy speciális kitevő esetén tekintik a peremérték feladatot, amelyet általánosabb kitevőkre vizsgált Bognár és Drábek 2005-ben [12]. A disszertáció 5. fejezetében a megoldások analitikus megoldását adtuk meg ebben az általános esetben.

Ezúton szeretném megjegyezni, hogy a különböző fejezetekben az azonos betűvel jelölt paraméterek fejezetenként más jelentéssel bírnak. Ennek oka, hogy a szakirodalomban szokásos jelöléseket igyekeztünk alkalmazni az egyes témákban. Például az n paraméter a 4. fejezetben a reológiai hatványkitevőt, míg az 5. fejezetben a dimenziót jelöli.

1.3 A kutatás célja

A disszertáció alapját a már megírt cikkek adják, melyeket az irodalom alapos tanulmányozása előzött meg. Az irodalomjegyzékben felsorolt cikkek, könyvek, jegyzetek áttekintése hozzájárult az adott terület részletes megismeréséhez. Az elkészült és publikált cikkek alapján megírt dolgozat három fő témával foglalkozik.

Az egyik trigonometrikus függvények általánosításának hatványsorral való felírása, illetve a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására módszer kidolgozása.

A második részben tekintettünk egy hárompontos kezdetiérték problémát, ahol a differenciálegyenletben szereplő függvényekre szükséges és elégséges feltételt adtunk, úgy hogy az adott problémának létezzen megoldása. Célunk volt, hogy feltételeket tudjunk adni először a homogén esetre, majd az inhomogén differenciálegyenletre vonatkozóan. Ezek után a megoldások számát is vizsgáltuk.

Elméleti eredményeink gyakorlati vonatkozásait két részletben tárgyaljuk. Az egyik irány a folyadék mechanikai alkalmazások területe, ahol próbáltunk kézzel fogható, napjainkban is aktuális kérdésre választ adni. Mindennapi használatban is előforduló alacsony sűrűségű polietilén esetén vizsgáltuk, hogy a súrlódásból származó hőfejlődés miatt hogyan növekszik meg a hőmérséklet kapilláris cső esetén. Mivel a polietilénre vonatkozó reológiai tulajdonságokat a gyártó cég nem szokta közölni, ezért méréssel adtuk meg ezeket a paramétereket és a kapott peremérték feladat megoldásait a mért anyagi paraméterekkel határoztuk meg. A számításokkal előállítottuk azokat a hőmérsékleteket a cső középvonalában, amelyek méréssel nem meghatározhatóak.

A másik alkalmazás a reakció-diffúzió egyenletek körében ismert. Egy konkrét egyenlettel foglalkoztunk, melynek egzakt megoldását Bognár és Drábek 2005-ben megjelent közös cikkükben már megadták. A feladat pozitív megoldásait kerestük és a feladatban szereplő paramétereket vizsgálatuk, majd perturbációanalízist végeztünk.

Minden feladatban numerikus számításokra volt szükségünk. Ezeket a számításokat és az így nyert ábrákat a MAPLE, a MATHEMATICA és a MATLAB programcsomagok valamelyikében megírt programokkal készítettük.

2 Általánosított hipergeometrikus függvények

2.1 Bevezetés

Ebben a részben hipergeometrikus függvények egyfajta általánosítását fogjuk vizsgálni, melyek alatt itt általánosított szinusz, koszinusz, szinusz hiperbolikusz és koszinusz hiperbolikusz függvényeket értünk.

Tekintsük a következő lineáris differenciálegyenletet:

$$y'' + y = 0, \quad y = y(x).$$

Ennek a differenciálegyenletnek két lineárisan független megoldása a $\sin x$ az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett, a másik megoldásfüggvény a $\cos x$, mely az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket teljesíti. Az

$$y'' - y = 0, \quad y = y(x).$$

differenciálegyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel melletti megoldása a $\operatorname{sh} x$, míg az $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételekkel a $\operatorname{ch} x$ adódik.

Tekintsük a

$$(|y'|^{p-1}y')' + p|y|^{p-1}y = 0, \quad x > 0 \tag{2.1}$$

differenciálegyenlet, ahol $p > 0$ valós szám és az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel melletti megoldását jelöljük $\mathrm{S_p}(x)$-szel, amelyet *általánosított szinusz függvénynek* fogunk nevezni. A (2.1) differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel melletti megoldását $\mathrm{C_p}(x)$-szel jelöljük és *általánosított koszinusz függvénynek* nevezzük.

A (2.1) differenciálegyenlet a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- az egyenlet a deriváltban is nemlineáris; féllineárisnak is szokás nevezni (mely elnevezés Bihari Imrétől ered, aki az 1950-es évektől kezdte az ilyen típusú differenciálegyenleteket vizsgálni), mivel a lineáris differenciálegyenletekre jellemző tulajdonságoknak csak a felét őrzi meg,
- a differenciálegyenlet megőrzi a homogenitási tulajdonságot, azaz ha y a (2.1) differenciálegyenlet egy megoldása, akkor bármely C valós szám esetén Cy is megoldása a (2.1) egyenletnek,
- az additivitás tulajdonsága azonban nem teljesül, azaz, ha y_1 és y_2 a (2.1) differenciálegyenlet két különböző megoldása, akkor tetszőleges C_1, C_2 valós számok esetén $C_1y_1 + C_2y_2$ a differenciálegyenletnek általában nem megoldása.

2.2 Lehetséges általánosítások

Ebben a fejezetben felsoroljuk a trigonometrikus függvények néhány az irodalomban ismert (2.1)-től különböző általánosítását.

a) Az általánosítás egyik lehetősége egy integráloperátor bevezetése (Edmunds és Lang [23]), azaz definiálunk egy $T : L_2(0,1) \longrightarrow L_2(0,1)$ operátort a következő formulával:

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

T kompakt és így létezik olyan függvény $L_2(0,1)$-ben, melyre T-nek a következő normája áll fenn:

$$\|T\| = \frac{2}{\pi}.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\tfrac{\pi}{2}, \\ Tf(t) &= \sin\left(\tfrac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Ezeket az összefüggéseket általánosítani lehet $\overline{p} \neq 2$ paraméterrel, ekkor a $T : L_{\overline{p}}(0,1) \longrightarrow L_{\overline{p}}(0,1)$ operátorra a norma a következőképpen adható meg:

$$\|T\| = \frac{(\overline{p}' + \overline{p})^{1-\frac{1}{\overline{p}'}+\frac{1}{\overline{p}}}(\overline{p}')^{\frac{1}{\overline{p}}}\overline{p}^{\frac{1}{\overline{p}'}}}{B\left(\frac{1}{\overline{p}'}, \frac{1}{\overline{p}}\right)},$$

ahol B a béta függvény és amelyhez

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos_{\overline{p}}\left(\tfrac{\pi_{\overline{p}} x}{2}\right)\tfrac{\pi_{\overline{p}}}{2} \\ Tf(t) &= \sin_{\overline{p}}\left(\tfrac{\pi_{\overline{p}} x}{2}\right) \end{aligned}$$

formulák adódnak (lásd [23]).

b) A szinusz függvény egy másik általánosítása az approximációelmélethez kapcsolódik. Vegyük $I = [a, b]$-n a következő Sobolev-beágyazást

$$E : W_0^{1,\overline{p}}(I) \to L^{\overline{p}}(I),$$

ahol $W_0^{1,\overline{p}}(I)$ a következő normával definiált Sobolev-féle tér:

$$\|u\|_{1,\overline{p}} = \left(\int_0^1 |u'(t)|^{\overline{p}} dt\right)^{\frac{1}{\overline{p}}}.$$

Megmutatható, hogy a $W_0^{1,\overline{p}}(I)$ térben lévő egységgömb legnagyobb $L^{\overline{p}}$ normájú eleme ezen általánosított szinusz függvénnyel arányos függvény az I intervallumon

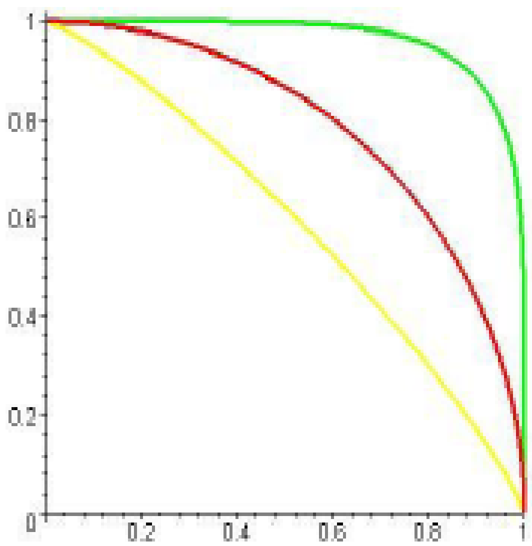
$$f(x) := \frac{\sin_{\overline{p}}\left(\frac{x-a}{\pi_{\overline{p}}}\right)}{\left\|\sin_{\overline{p}}\left(\frac{x-a}{\pi_{\overline{p}}}\right)\right\|}.$$

c) Egy további lehetséges általánosítás az a geometriai megközelítés, ahol a klasszikus szinusz és koszinusz függvényt az $\mathbf{R}^2$ síkon lévő egységkörrel és az l_2 metrikával definiáljuk. Az általánosítás pedig az $\mathbf{R}^2$-ben az $l_{\overline{p}}$ metrikával definiálható.

Az $r > 0$ esetben $C_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2\}$ a kör $\mathbf{R}^2$-ben l_2 metrikával.

A $\overline{p}$-kör az $C_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^{\overline{p}} + y^{\overline{p}} = r^{\overline{p}}\}$ összefüggéssel adható meg.

A 2.1. ábra azt mutatja, hogy C_1 hogyan változik különböző $\overline{p}$ értékek esetén az első síknegyedben.



2.1. ábra : $C_1(x)$ ábrázolása $\overline{p} = 1.2$ (sárga), 2 (piros), 6 (zöld) esetén

d) A szinusz függvény egy másfajta általánosítását adta Rajovic, Dimitrovski, Stoiljkovic és Radosavljevic (lásd [55]). A szerzők tekintik a rezgés egyenletét:

$$y'' + B(x)y = 0,$$

ahol $B(x)$ pozitív, folytonos és monoton függvény a $[0,x]$ intervallumon.

Megmutatták, hogy a fenti egyenletnek a két független oszcilláló megoldása:

$$y_1 = \sin_{B(x)} x,$$

$$y_2 = \cos_{B(x)} x,$$

amelyeket a következő sor alakú közelítéssel adtak meg:

$$\begin{aligned} y_1 &= x - \int\int xB(x)dx^2 + \int\int B(x)\int\int xB(x)dx^4 \\ &- \int\int B(x)\int\int B(x)\int\int xB(x)dx^6 + \cdots, \\ y_2 &= 1 - \int\int B(x)dx^2 + \int\int B(x)\int\int B(x)dx^4 \\ &- \int\int B(x)\int\int B(x)\int\int B(x)dx^6 + \cdots. \end{aligned}$$

Ha $B(x)$ konstans, akkor a klasszikus szinusz és koszinusz függvényt kapjuk megoldásként, míg bármely más pozitív $B(x)$ esetén a következő formulák állnak fenn:

$$\sin_{B(x)} x \approx \frac{\sin(x\sqrt{B(x)})}{\sqrt{B(x)}},$$

$$\cos_{B(x)} x \approx \cos(x\sqrt{B(x)}).$$

2.2.1 Két gyakorlati alkalmazás

1. Tekintsük az

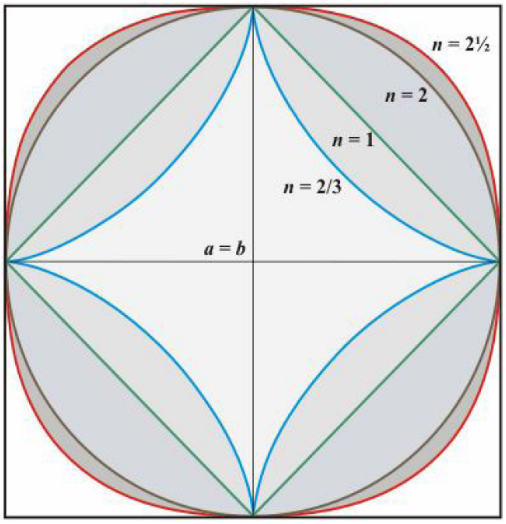
$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

egyenletet, ahol a és b különböző paraméterek, n pedig pozitív valós szám.

- $n < 2$ esetben a fenti egyenlettel megadott görbéket *hipoellipsziseknek* nevezik,
- $n > 2$ esetén *hiperellipszisek* adódnak.

Ezeket a görbéket 1818-ban Lamé említi először, ezért szokták a görbéket *Lamé görbéknek* nevezni. Sokan alkalmazták ezeket a mindennapi életben. Például Hein dán építész, akinek a nevéhez többek között a stocholmi Sergel tér tervezése fűződik. Olyan görbét keresett a tér körforgalmi útjának tervezésénél, amely nem kör, nem ellipszis és nem is sokszög (lásd 2.3. ábra). A fenti egyenletben a kitevőt $n = 5/2$-nek vette és a megoldást *szuperellipszisnek* nevezte. A tér érdekessége, hogy a körforgalom belsejében egy óriási szökőkút van, alatta pedig egy bevásárlóközpont található, melynek mennyezete átlátszó. Ezzel a görbével még számos, a hétköznapi életben használatos tárgyat tervezett, mint például tányérokat, hamutálakat, szupertojásokat.

2. Zapf ezen görbe alapján tervezte meg a Melior betűtípust 1952-ben ($n = 5/2$). A 2.2. ábrán különböző n értékek esetén a fenti egyenletnek eleget tevő görbéket szemléltetjük.



2.2. ábra

2.3. ábra : Sergel tér, Stocholm

2.3 A pitagoraszi összefüggés általánosítása

A (2.1) differenciálegyenlet $p = 1$ esetben a következő:

$$y'' + y = 0$$

lineáris egyenlettel egyezik meg. Ezen differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek mellett a $\sin x$ és a $\cos x$ az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételekkel adódik. A megoldások kielégítik a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pitagoraszi összefüggést. A (2.1) differenciálegyenletet y'-vel végigszorozva és integrálva az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ illetve az $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ feltételeket figyelembe véve kapjuk a

$$|y'|^{p+1} + |y|^{p+1} = 1, \quad p > 0 \tag{2.2}$$

differenciálegyenletet. Tetszőleges p esetén az $\mathrm{S_p}(x)$ függvényt a (2.2) differenciálegyenletbe helyettesítve az

$$|\,\mathrm{S_p}'(x)|^{p+1} + |\,\mathrm{S_p}(x)|^{p+1} = 1$$

a *pitagoraszi összefüggés általánosítása* adódik.

A (2.2) elsőrendű differenciálegyenletből rendezéssel a következő $|y'|^{p+1} = 1 - |y|^{p+1}$ egyenletet kapjuk, melyből $y > 0$ és $y' > 0$ feltételezéssel a változók szétválasztása után

$$\frac{dy}{\sqrt[p+1]{1 - y^{p+1}}} = dx,$$

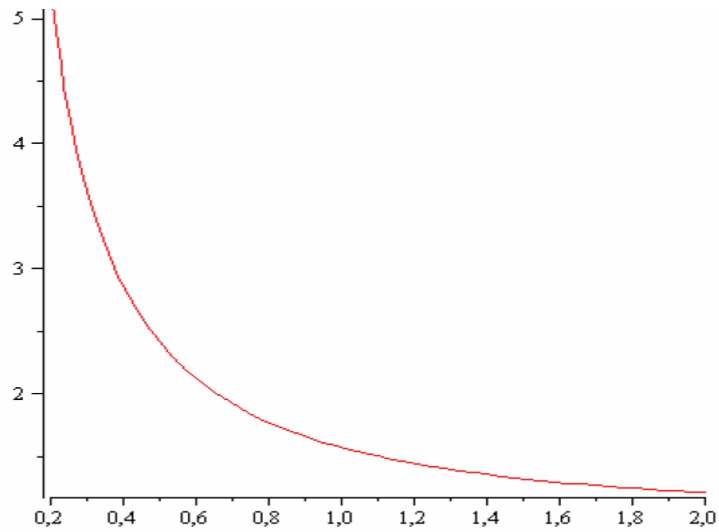
melyből integrálással

$$x = \int_0^{\mathrm{S_p}} \frac{dy}{\sqrt[p+1]{1 - y^{p+1}}}, \tag{2.3}$$

ahol $y = \mathrm{S_p}(x)$ egy *általánosított szinusz függvény.*

Ez a függvény a maximum értékét, vagyis az 1-et a $x = \widehat{\pi}/2$-nél veszi fel, amelyet a következő helyettesítéses integrállal számítunk ki (ahol $y^{p+1} = t$):

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\pi}}{2} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[p+1]{1 - y^{p+1}}} dy = \frac{1}{p+1} \int_0^1 t^{\frac{-p}{p+1}} (1-t)^{\frac{-1}{p+1}} dt \\
&= \frac{1}{p+1} B\left(\frac{1}{p+1}, \frac{p}{p+1}\right) \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right)} = \frac{1}{p+1} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right) \\
&= \frac{\frac{\pi}{p+1}}{sin \frac{\pi}{p+1}}, \text{ ahol } B \text{ a béta függvény, } \Gamma \text{ a gamma függvényt jelöli.}
\end{aligned}$$



2.4. ábra : $\widehat{\pi}/2$

A 2.4. ábrán $\widehat{\pi}/2$ p-től való függését szemléltetjük.

Az $\mathrm{S_p}(x)$ általánosított szinusz függvény nemcsak a $[0, \widehat{\pi}/2]$ intervallumon értelmezhető, hanem kiterjeszthető a valós számok halmazára a következőképpen:

$$\mathrm{S_p}(x) = \begin{cases} \mathrm{S_p}(\widehat{\pi} - x), & \text{ha} \quad \frac{\widehat{\pi}}{2} \le x \le \widehat{\pi} \\ -\mathrm{S_p}(x - \widehat{\pi}), & \text{ha} \quad \widehat{\pi} \le x < 2\widehat{\pi} \\ \mathrm{S_p}(x + 2k\widehat{\pi}), & \text{ahol} \quad k = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases} \tag{2.4}$$

A függvény további tulajdonsága, hogy:

$$\mathrm{S_p}(x_0) = 0, \text{ ha } x_0 = 0, \pm\widehat{\pi}, 2\widehat{\pi}, \cdots .$$

2.4 Általánosított szinusz függvény hatványsor alakú közelítése

Az alkalmazások szempontjából fontos a függvények megadása végtelen sor alakjában, amennyiben ez lehetséges. Az így kapott végtelen soroktól megkívánjuk, hogy bizonyos intervallumban a sorbafejtett függvényt jól közelítsék.

Jól ismertek a trigonometrikus és hiperbolikusz függvényekre vonatkozó hatványsorok:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\\
\cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - ... + (-1)^{n}\tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\\
\operatorname{sh} x &= x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + ... + \tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\\
\operatorname{ch} x &= 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + ... + \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,
\end{aligned}$$

melyek minden valós x értékekre konvergensek.

Tekintsük a

$$(|y'|^{p-1}y')' + p|y|^{p-1}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{2.5}$$

kezdetiérték problémát, mely megoldásainak létezését Elbert bizonyította a [25] cikkében 1979-ben. A (2.5) feladatban $y > 0$ illetve $y' > 0$ feltételek mellett keressük y-t a következő alakban:

$$y(x) = x \cdot Q(x^\alpha). \tag{2.6}$$

Az α kitevő meghatározására Bognár [11]-beli dolgozatában szereplő módszert alkalmazzuk, ahol a hatványsor alakú megoldás létezésére a Briot-Bouquet tételt használta fel a szerző.

2.1. Briot-Bouquet tétele: *Tegyük fel, hogy a*

$$\begin{cases} \xi z_1' = u_1(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)) \\ \xi z_2' = u_2(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)) \end{cases} \tag{2.7}$$

egyenletrendszer esetén u_1 és u_2 holomorf függvényei ξ-nek $z_1(\xi)$-nek és $z_2(\xi)$-nek origó közelében, továbbá $u_1(0,0,0) = u_2(0,0,0) = 0$. Ekkor a (2.7)-nek létezik holomorfikus megoldása, amely kielégíti a $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 0$ kezdeti feltételeket, ha

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right|_{(0,0,0)} & \left.\frac{\partial u_1}{\partial z_2}\right|_{(0,0,0)} \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right|_{(0,0,0)} & \left.\frac{\partial u_2}{\partial z_2}\right|_{(0,0,0)} \end{bmatrix}$$

mátrix egyik sajátértéke sem pozitív egész szám.

A tétel bizonyítása Briot és Bouquet közös [14] dolgozatában megtalálható.

2.2. Tétel: *A (2.5) kezdetiérték probléma megoldását felíró* $y(x) = x \cdot Q(x^\alpha)$ *összefüggésre a megoldásfüggvény előállítható az*

$$\mathrm{S_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1} = a_0 x + a_1 x^{p+2} + a_2 x^{2p+3} + \cdots$$

hatványsor alakban a zérus környezetében.

Bizonyítás:
A (2.5) kezdetiérték feladat esetén a (2.6) alakú megoldásokat keresve meghatározzuk a deriváltakat:

$$y'(x) = Q(x^\alpha) + \alpha \cdot x^\alpha \cdot Q'(x^\alpha),$$

$$y''(x) = \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot x^{\alpha - 1} \cdot Q'(x) + \alpha^2 \cdot x^{2\alpha - 1} Q''(x),$$

melyeket a (2.5) differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$Q''(x) = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot x^{p+1-2\alpha} \cdot Q(x)^p (Q(x) + \alpha \cdot x^\alpha \cdot Q'(x))^{1-p} - \frac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot x^{-\alpha} \cdot Q'(x).$$

Elvégezzük az $x^\alpha = \xi$ helyettesítést, majd a $Q(\xi) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \xi + z(\xi)$ alakot feltételezve, ahol z differenciálható a $z(0) = 0 = z_1(0)$, $z'(0) = 0 = z_2(0)$ adódik. A kezdeti feltételből kapjuk, hogy $\hat{b}_0 = 1$. Ezek után bevezetjük az u_1 és u_2 függvényeket a következő módon:

$$\begin{cases} \xi \cdot z_1' = u_1(\xi, z_1, z_2) \\ \xi \cdot z_2' = u_2(\xi, z_1, z_2) \end{cases}$$

és alkalmazzuk a Briot-Bouquet tételt úgy, hogy a másodrendű differenciálegyenletet speciális Briot-Bouquet egyenletekből álló egyenletrendszerrel helyettesítjük, azaz tekintsük az

$$\begin{cases} u_1 & = & \xi \cdot z_2 \\ u_2 & = & \xi \cdot z_2' \\ & = & -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \xi^{\frac{p+1}{\alpha} - 1} \cdot (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot \xi + z_1)^p \\ & \cdot & (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \xi + z_1 + \alpha \xi (\hat{b}_1 + z_2))^{1-p} - \frac{\alpha+1}{\alpha} (\hat{b}_1 + z_2) \end{cases}$$

egyenletrendszert.

A Briot-Bouquet tételben szereplő

$$\begin{cases} u_1(0,0,0) = 0 \\ u_2(0,0,0) = 0 \end{cases}$$

feltételek teljesülnek, ha

$$u_2(0,0,0) = 0 = \frac{-1}{\alpha^2}\hat{b}_0 - \frac{\alpha+1}{\alpha}\hat{b}_1,$$

ha az $\alpha = p+1$ és $\hat{b}_1 = -1/\alpha(\alpha+1)$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (2.5) kezdetiérték probléma megoldásfüggvénye előállítható az

$$\mathrm{S_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1} = a_0 x + a_1 x^{p+2} + a_2 x^{2p+3} + \cdots$$

hatványsor alakban a zérus környezetében.

□

A 2.5. és 2.6. fejezetben megmutatjuk, hogy hogyan tudjuk meghatározni a sorfejtésben szereplő $a_0, a_1, a_2 \cdots$ együtthatókat.

2.5 Az együtthatók meghatározása

Az

$$|y'|^{p-1}y'' + |y|^{p-1}y = 0, \quad p > 0 \tag{2.8}$$

egyenlet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek melletti hatványsor alakú megoldását $\mathrm{S_p}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1}$ alakban keressük. Ekkor $\mathrm{S_p}(x)$ deriváltjai a következőképpen adhatók meg:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_p}'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i(p+1)} = b_0 + b_1 x^{p+1} + b_2 x^{2p+2} + \cdots ,\\
\mathrm{S_p}''(x) &= x^p \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i(p+1)} = c_0 x^p + c_1 x^{2p+1} + c_2 x^{3p+2} + \cdots ,
\end{aligned}$$

ahol a_i, b_i, c_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együtthatók. A kezdeti feltételekből:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_p}(0) &= 0,\\
\mathrm{S_p}'(0) &= b_0 = 1,
\end{aligned}$$

továbbá az a_i, b_i, c_i együtthatók között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{cases} b_i = a_i(i(p+1)+1) \\ c_i = b_{i+1}(i+1)(p+1), \quad i = 0, 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Ezekből az összefüggésekből $i = 0$ esetén $a_0 = b_0 = 1$ értékek adódnak, míg a (2.8) differenciálegyenletből a

$$c_0 = -1$$

együttható értékét kapjuk. Ezen általánosított szinusz függvény hatványsor alakját $[0, \widehat{\pi}/2]$ intervallumon keressük, ahol $\mathrm{S_p}(x) \geq 0$, $\mathrm{S_p}'(x) \geq 0$.

Az $y = \mathrm{S_p}(x)$ megoldásfüggvényt a (2.8) egyenletbe helyettesítve

$$[\mathrm{S_p}'(x)]^{p-1} \cdot \mathrm{S_p}''(x) + [\mathrm{S_p}(x)]^p = 0. \tag{2.9}$$

Az a_i, b_i, c_i együtthatók meghatározásakor a függvény elaszticitását alkalmazzuk.

2.6 Függvény elaszticitása

2.3. Definíció: *Legyen f függvény differenciálható az x pontban és $f(x) \neq 0$. Ekkor az f függvény x pontbeli elaszticitását a következőképpen definiáljuk:*

$$\frac{x}{f(x)} \cdot f'(x),$$

melyet az $E(f(x))$ szimbólummal jelölünk.

Az elaszticitás néhány fontos tulajdonságát az alábbiakban foglaljuk össze:

$$\begin{aligned} E(f(x) \cdot g(x)) &= E(f(x)) + E(g(x)), \\ E(x^\alpha) &= \alpha, \\ E(f^\alpha(x)) &= \alpha \cdot E(f(x)), \\ E(-f(x)) &= E(f(x)). \end{aligned}$$

A (2.9) differenciálegyenlet esetén vegyük az egyenlet mindkét oldalának elaszticitását és alkalmazzuk a fenti tulajdonságokat. Ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(p-1)E(\mathrm{S_p}'(x)) + E(\mathrm{S_p}''(x)) = pE(\mathrm{S_p}(x)). \tag{2.10}$$

Következő lépésként meghatározzuk az $E(\mathrm{S_p}(x))$, $E(\mathrm{S_p}'(x))$ és $E(\mathrm{S_p}''(x))$

elaszticitásokat, melyek közül az $E(\mathrm{S_p}(x))$-t a követezőképpen vezetjük le:

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{S_p}(x)) &= E\left(x\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^{i(p+1)}\right) \\
&= E(x) + E\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^{i(p+1)}\right) \\
&= 1 + \frac{x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot i \cdot (p+1) \cdot x^{i \cdot p}}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^{i(p+1)}} \\
&= 1 + (p+1)\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^{i(p+1)}}.
\end{aligned}$$

Alkalmazva, hogy $a_0 = 1$ és elvégezve az osztást a következő formulát kapjuk:

$$E(\mathrm{S_p}(x)) = 1 + (p+1)\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot x^{k(p+1)},$$

ahol $A_k = k \cdot a_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_i \cdot a_{k-i}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$.
Hasonlóan számítjuk ki az $E(\mathrm{S_p}'(x))$ -t

$$E(\mathrm{S_p}'(x)) = (p+1) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^{i(p+1)}},$$

ahol figyelembe véve, hogy $c_0 = -1$ az osztást elvégezve kapjuk, hogy

$$E(\mathrm{S_p}'(x)) = (p+1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot x^{k(p+1)},$$

ahol $B_k = k \cdot b_k - \sum_{i=1}^{k-1} B_i \cdot b_{k-i}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$.
Az $\mathrm{S_p}''(x)$ elaszticitása:

$$E(\mathrm{S_p}''(x)) = p + (p+1) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^{i(p+1)}},$$

ahonnan

$$E(\mathrm{S_p}''(x)) = p + (p+1)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot x^{k(p+1)},$$

ahol $C_k = -k\cdot c_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} C_i \cdot c_{k-i}, \quad k = 1,2,3,\cdots$.

A kiszámított elaszticitásokat a (2.10) egyenletbe helyettesítve és az egyenlet két oldalán x hatványainak a megfelelő együtthatóit összehasonlítva adódik a

$$C_k = p\cdot A_k - (p-1)\cdot B_k \quad k = 1,2,3,\cdots \tag{2.11}$$

rekurzív összefüggés, ahonnan kifejezhető a c_k együttható, azaz

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} C_i\cdot c_{k-i} - pa_k \\ &+ \frac{p}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k-1} A_i\cdot a_{k-i} + (p-1)b_k - \frac{p-1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} B_i\cdot b_{k-i} \\ &= (p-1)b_k - pa_k \\ &- \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k-1}(C_i\cdot c_{k-i} - pA_i\cdot a_{k-i} + (p-1)B_i\cdot b_{k-i}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Az alábbiakban néhány konkrét példában szemléltetjük a hatványsor alakú közelítő megoldás meghatározását.

Példa: Adjuk meg a

$$|y'|^2 y'' + |y|^2 y = 0,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1 \tag{2.13}$$

kezdetiérték probléma hatványsor alakú megoldását. A (2.13) feladatbeli egyenlet a (2.8) differenciálegyenlettel egyezik meg $p = 3$ esetén, melynek megoldását jelöljük $\mathrm{S_3}(x)$-szel. A következő hatványsor alakban keressük a megoldást

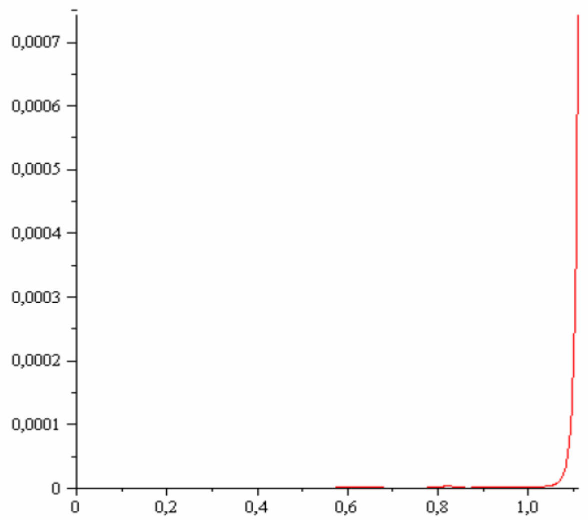
$$\mathrm{S_3}(x) = a_0 x + a_1 x^5 + a_2 x^9 + a_3 x^{13} + \cdots,$$

ahol az a_i $(i = 0,1,2,\cdots)$ együtthatókat a (2.11) rekurzív képletből (2.12) alkalmazásával egy MAPLE-ben megírt programmal határozzuk meg. A következő közelítő hatványsort kapjuk:

$$\mathrm{S_3}(x) = x - 0,05000x^5 - 0,00486x^9 - 0,000124x^{13} - \cdots, \tag{2.14}$$

melyet a $[0; 1,11072]$ intervallumon értelmezünk, ahol $p = 3$ esetén az $1,11072$ érték a $\widehat{\pi}/2$-nek felel meg.

Az 2.5. ábra a (2.13) kezdetiérték feladat egy a MAPLE-ben Runga-Kutta módszerrel nyert numerikus és a (2.14) hatványsor alakú közelítő megoldás különbségét szemlélteti, ezzel alátámasztva módszerünk helyességét.



2.5. ábra

2.7 Általánosított koszinusz függvény és hatványsora

Definiáljuk a koszinusz függvény egy általánosítását a következőképpen, mint a

$$|y'|^{p-1}y'' + |y|^{p-1}y = 0, \quad p > 0,$$
$$y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0,$$

nemlineáris kezdetiérték probléma megoldását. A megoldást *általánosított koszinusz függvénynek* nevezzük és $\mathrm{C_p}$-vel jelöljük a $[0, \widehat{\pi}/2]$ intervallumon, amelyre teljesül a következő integrál:

$$x = -\int_0^{\mathrm{C_p}} \frac{dy}{\sqrt[p+1]{1 - y^{p+1}}}$$

az $y > 0$, $y' < 0$ feltétel mellett. Ennek a hatványsor alakú közelítő megoldása a

$$\mathrm{C_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)} = l_0 + l_1 x^{\frac{1}{p}+1} + l_2 x^{2\left(\frac{1}{p}+1\right)} + \cdots$$

alakban kereshető (lásd [11]) ahol az l_i együtthatók kiszámítására megadunk egy módszert bizonyos feltételt kielégítő p értékek esetén.

Kiszámítjuk ezen általánosított koszinusz függvény első és második deriváltját

$$\begin{aligned} \mathrm{C_p}'(x) &= x^{\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)}, \\ \mathrm{C_p}''(x) &= x^{\frac{1}{p}-1} \sum_{i=0}^{\infty} n_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)}, \end{aligned}$$

ahol m_i és n_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együtthatók. A kezdeti feltételekből adódik az $l_0 = 1$ és $m_0 = \sqrt[p]{-p}$, és a differenciálegyenletből az $n_0 = \frac{\sqrt[p]{-p}}{p}$ együttható feltéve, hogy a $\sqrt[p]{-p}$ értelmezhető.

Az l_i, m_i és n_i együtthatók között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{cases} m_i = (i+1)\left(\frac{1}{p}+1\right) l_{i+1}, \\ n_i = m_i \left[i\left(\frac{1}{p}+1\right) + \frac{1}{p} \right], \; i = 0, 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Miután a $\mathrm{C_p}$-t, $\mathrm{C_p}'$-t, illetve $\mathrm{C_p}''$-t a differenciálegyenletbe helyettesítjük és vesszük mindkét oldal elaszticitását alkalmazzuk az elaszticitás megfelelő tulajdonságait. Ezek után összehasonlítjuk az egyenlet bal és jobb oldalán álló megfelelő tagok együtthatóit és így a következő rekurzív összefüggést kapjuk:

$$N_k = p \cdot L_k - (p-1) \cdot M_k,$$

ahol

$$\begin{aligned} L_k &= k \cdot l_k - \sum_{i=1}^{k-1} L_i \cdot l_{k-i}, \\ M_k &= k \cdot \frac{m_k}{m_0} - \sum_{i=1}^{k-1} M_i \cdot \frac{m_{k-i}}{m_0}, \\ N_k &= k \cdot \frac{n_k}{n_0} - \sum_{i=1}^{k-1} N_i \cdot \frac{n_{k-i}}{n_0}, \; k = 1, 2, 3 \cdots . \end{aligned}$$

Bemutatunk egy példát a hatványsor alakú közelítő megoldás meghatározására.

Példa: Adjuk meg a

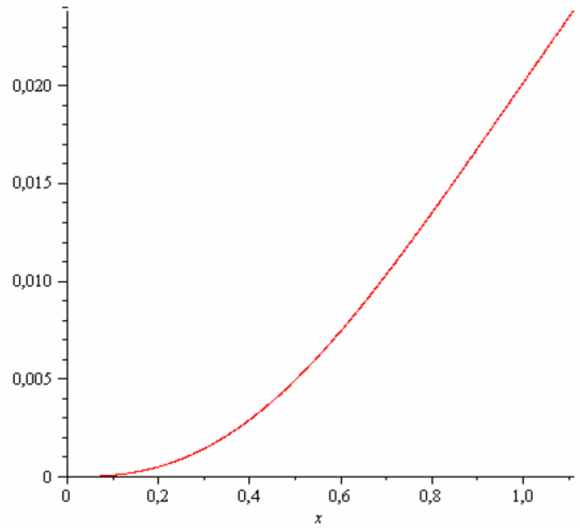
$$|y'|^2 y'' + |y|^2 y = 0,\ \ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0 \tag{2.15}$$

kezdetiérték probléma megoldásfüggvényének sorfejtéses alakját. (Ez az eredeti feladat $p = 3$ esetén.)

A megfelelő együtthatók kiszámítása után a következő hatványsor alakú megoldás adódik:

$$\mathrm{C}_3(x) = 1 - 1,081x^{\frac{4}{3}} + 0,2106x^{\frac{8}{3}} - 0,039x^4 + \cdots .$$

Az együtthatók kiszámítását szintén egy MAPLE-ben megírt programmal végeztük. Az 2.6. ábra a (2.15) kezdetiérték feladat numerikus és a hatványsor alakú megoldás különbségét mutatja a $[0, \widehat{\pi}/2]$ intervallumban.



2.6. ábra

2.8 Általánosított szinusz hiperbolikusz függvény

Definiáljuk a szinusz hiperbolikusz függvény egy általánosítását, mint a

$$|y'|^{p-1} y'' - |y|^{p-1} y = 0, \quad > 0 \tag{2.16}$$

$$y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1.$$

nemlineáris kezdetiérték probléma megoldását, melyet $\mathrm{Sh_p}(x)$-el jelölünk és *általánosított szinusz hiperbolikusz függvénynek* nevezünk és amelyre teljesül a következő integrál

$$x = \int_0^{\mathrm{Sh_p}} \frac{dy}{\sqrt[p+1]{y^{p+1}+1}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Keressük $\mathrm{Sh_p}(x)$-et

$$\mathrm{Sh_p}(x) = x \sum_{i=0}^{\infty} t_i x^{i(p+1)}$$

alakban, ahol t_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együttható. Meghatározzuk ezen általánosított szinusz hiperbolikusz függvény első és második deriváltját:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh_p}'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^{i(p+1)}, \\ \mathrm{Sh_p}''(x) &= x^p \sum_{i=0}^{\infty} v_i x^{i(p+1)}, \end{aligned}$$

ahol u_i és v_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együtthatók. Itt is a kezdeti feltételekből tudjuk meghatározni a 0 indexű együtthatókat:

$$t_0 = 1,\ u_0 = 1,\ v_0 = 1.$$

Majd az előző fejezetekben leírt módszer alkalmazásával a következő összefüggéseket kapjuk a T_k, U_k, V_k együtthatókra:

$$V_k = pT_k - (p-1)U_k, \tag{2.17}$$

ahol

$$\begin{aligned} V_k &= -k \cdot v_k + \sum_{i=1}^{k-1} V_i \cdot v_{k-i}, \\ T_k &= k \cdot t_k - \sum_{i=1}^{k-1} T_i \cdot t_{k-i}, \\ U_k &= k \cdot u_k - \sum_{i=1}^{k-1} U_i \cdot u_{k-i},\ k = 1, 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

Ezen összefüggések alkalmazásával az $\mathrm{Sh_p}(x)$ hatványsorában szereplő összes együttható kiszámítható.

Példa: Adott a következő kezdetiérték probléma:

$$|y'|^2 y'' - |y|^2 y = 0,$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

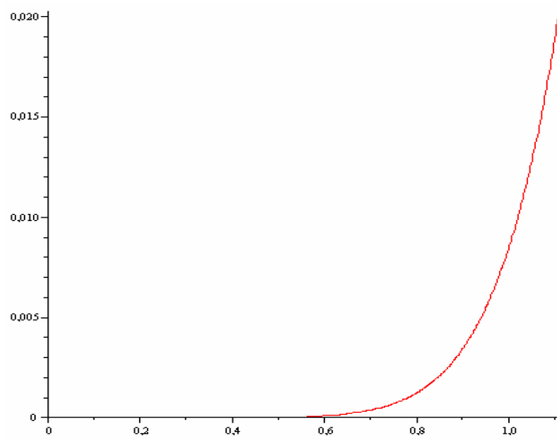
mely (2.16)-tal egyezik meg $p = 3$ esetén. A felírt feladat megoldását a következő hatványsor alakban keressük:

$$\mathrm{Sh}_3(x) = t_0 x + t_1 x^5 + t_2 x^9 + t_3 x^{13} + \cdots .$$

A t_i együtthatókra a (2.17)-ből egy MAPLE-ban megírt programmal elvégzett számítások után

$$\mathrm{Sh}_3(x) = x + 0.05000x^5 + 0.00486x^9 - 0.00030x^{13} - \cdots .$$

adódik. A 2.7. ábra a szinusz hiperbolikusz függvény numerikus és hatványsor alakú megoldásának különbségét mutatja.



2.7. ábra

2.9 ÁLTALÁNOSÍTOTT KOSZINUSZ HIPERBOLIKUSZ FÜGGVÉNY

Definiáljuk a koszinusz hiperbolikusz függvény egy általánosítását, mint az

$$|y'|^{p-1}y'' - |y|^{p-1}y = 0, \quad p > 0$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

kezdetiérték probléma megoldását, melyet *általánosított koszinusz hiperbolikusz függvénynek* nevezünk és $\mathrm{Ch_p}$-vel jelölünk. A megoldásfüggvény teljesíti az

$$x = \int_0^{\mathrm{Ch_p}} \frac{dy}{\sqrt[p+1]{y^{p+1} - 1}}\ , \ x \geq 0$$

integrált. A hatványsor alakú megoldást a

$$\mathrm{Ch_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)}$$

alakban keressük, ahol q_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együtthatók. Meghatározzuk az így általánosított koszinusz hiperbolikusz függvény deriváltjait:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch_p}'(x) &= x^{\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)}, \\ \mathrm{Ch_p}''(x) &= x^{\frac{1}{p}-1} \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^{i\left(\frac{1}{p}+1\right)}, \end{aligned}$$

ahol r_i, s_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ konstans együtthatókat jelölnek. A kezdeti feltételekből, valamint a differenciálegyenletből meg tudjuk határozni a nullindexű együtthatókat:

$$q_0 = 1, \quad r_0 = \sqrt[p]{p}, \quad s_0 = \frac{\sqrt[p]{p}}{p}.$$

Az előző két részben említett számításokhoz hasonlóan, az elaszticitás alkalmazásával a következő összefüggéseket nyerjük:

$$S_k = pQ_k - (p-1)R_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots,$$

ahol

$$\begin{aligned} Q_k &= k \cdot q_k - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i \cdot q_{k-i}, \\ R_k &= k \cdot \frac{r_k}{r_0} - \sum_{i=1}^{k-1} R_i \cdot \frac{r_{k-i}}{r_0}, \\ S_k &= k \cdot \frac{s_k}{s_0} - \sum_{i=1}^{k-1} S_i \cdot \frac{s_{k-i}}{s_0} \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

Ezen módszer alkalmazásával a $\mathrm{Ch_p}(x)$ hatványsorában szereplő összes együtthatót meg tudjuk határozni.

Példa: Adott a következő kezdetiérték probléma:

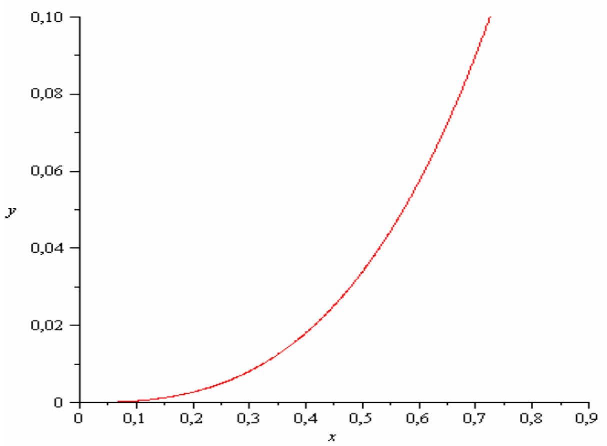
$$|y'|^2 y'' - |y|^2 y = 0,$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Ez a $p = 3$ esetnek felel meg. Az előző három feladathoz hasonlóan itt is kiszámítjuk a már megadott rekurzív képlettel (MAPLE-ben írt programmal) a feladat megoldásfüggvényének hatványsorában szereplő együtthatókat. A számítások eredménye:

$$\mathrm{Ch}_3(x) = 1 + 1,081x^{\frac{4}{3}} + 0,4387x^{\frac{8}{3}} + 0,1260x^4 + \cdots .$$

Tekintsük a 2.8. ábrát, melybe egy Maple-ben megírt program segítségével berajzoljuk az adott feladat numerikus és a hatványsorral közelített megoldásfüggvények különbségét.



2.8. ábra

2.10 Kvázilineáris Mathieu-féle egyenlet hatványsor alakú megoldásai

Elektromágneses, rugalmas hullámok terjedése a

$$\Delta U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{dt^2}, \tag{2.18}$$

hullámegyenlettel írható le, ahol $U = U(x,y,t)$ a kitérés, vagy amplitúdó és Δ a Laplace-operátort jelöli, azaz Descartes-féle derékszögű koordinátákkal:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Feltételezve, hogy a rezgés időben harmonikus és

$$U = e^{i\omega t}u(x,y),$$

alakban megadott, az $u(x, y)$ függvényre a

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \tag{2.19}$$

differenciálegyenlet adódik, ahol $k_1 = \omega/c$. Ha az alkalmazásokban a (2.19) egyenlethez ellipszis mentén adott mellékfeltételek járulnak, akkor célszerű a síkban elliptikus koordinátarendszerre áttérni. A ξ, η elliptikus koordináták és az x, y Descartes-féle derékszögű koordináták közötti kapcsolat:

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta,\ y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \tag{2.20}$$

ahol h tetszőleges állandó. A (2.20) egyenletekből rendezéssel a következő egyenletek nyerhetők, ahol ξ és η állandók:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{h^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{h^2 \operatorname{sh}^2 \xi} &= \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1, \\ \frac{x^2}{h^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{h^2 \sin^2 \eta} &= \operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi = 1, \end{aligned}$$

amelyek a ξ és η koordinátavonalak egyenletei, amelyek konfokális ellipszisek, hiperbolák.

A Laplace-operátor görbe vonalú, ortogonális koordinátarendszerekre adott alakját a (2.20) elliptikus koordinátarendszerre felírva a (2.19) egyenlet az alábbi módon írható fel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{k_1^2 h^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) u = 0.$$

Bevezetve a $k_1^2 h^2/2 = 2k^2$ jelölést az u függvény a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2k^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) u = 0 \tag{2.21}$$

egyenlet megoldása.

Ezen differenciálegyenletet a változók szétválasztásával vezetjük vissza közönséges differenciálegyenletre, tehát az u függvényt a következő alakban írjuk fel:

$$u = A(\xi) B(\xi)$$

és behelyettesítjük a (2.21)-be. A változók szétválasztása után felírjuk azon differenciálegyenleteket, melyek megoldása az A illetve B függvény:

$$\begin{aligned} A'' - (a - 2k^2 \operatorname{ch} 2\xi) A &= 0, \\ B'' + (a - 2k^2 \cos 2\eta) B &= 0. \end{aligned}$$

Ezen egyenleteket *Mathieu-féle*, illetve *módosított Mathieu-féle differenciálegyenletnek* nevezzük, melyek egymásba transzformálhatóak (lásd [28]).

Szokás szerint y-nal jelölve az ismeretlen függvényt és x-szel a független változót, az előzőekben nyert Mathieu-féle differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a - 2q\cos 2x)y = 0. \tag{2.22}$$

Ez egy másodrendű, homogén lineáris egyenlet, π szerint periodikus együtthatókkal, melyeknek azonban nem feltétlenül lesz minden megoldása periodikus.
Tekintsük az általunk vizsgált Mathieu-féle másodrendű differenciálegyenletet:

$$y'' + (a - 2q\cos 2x)y = 0, \tag{2.23}$$

ahol a és q konstansok és y eleget tesz a következő kezdeti feltétel párok valamelyikének:

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0,$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1.$$

A rögzített q-hoz tartozó π vagy 2π szerint periodikus páros illetve páratlan megoldásokat $\mathrm{ce_n}$-nel illetve $\mathrm{se_n}$-nel szokás jelölni (lásd Farkas könyve [28]).
Tekintsük a (2.23) Mathieu-féle differenciálegyenlet következő nemlineáris általánosítását:

$$\left(|y'|^{p-1}\, y'\right)' + (a - 2q\,\mathrm{S_p}'(2x))\,|y|^{p-1}\, y = 0, \tag{2.24}$$

ahol $p > 0$ és $\mathrm{S_p}'(2x)$ egy $\widehat{\pi}$ szerint periodikus függvény, ahol

$$\frac{\widehat{\pi}}{2} = \frac{\frac{\pi}{p+1}}{\sin\frac{\pi}{p+1}}.$$

(A $\widehat{\pi}/2$ kiszámítását lásd 2.4. fejezet.) Ha $q = 0$ és $a = 1$, akkor a (2.24) differenciálegyenlet

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldását *általánosított szinusz függvénynek* nevezzük és az $y = \mathrm{S_p}(x)$ jelölést alkalmazzuk.

Ezen fejezetben már megmutattuk, hogy az $y = \mathrm{S_p}(x)$ függvényt sorba tudjuk fejteni a következő formulával:

$$\mathrm{S_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1},$$

illetve meg tudjuk határozni $\mathrm{S_p}'(x)$ is a következő alakban:

$$\mathrm{S_p}'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i(p+1)}.$$

Továbbá, ha $p = 1$, akkor a (2.24) differenciálegyenlet a (2.23) differenciálegyenlettel egyezik meg, $\widehat{\pi} = \pi$ és $\mathrm{S_p}'(t) = \cos t$.

A (2.24) egyenlet $\widehat{\pi}$ szerint periodikus páros illetve páratlan megoldásait, melyeket $\mathrm{ce_p}(x,q)$ illetve $\mathrm{se_p}(x,q)$-val fogunk jelölni *általánosított elliptikus hengerfüggvényeknek* nevezzük. Farkas [28] könyvéből ismert, hogy az elliptikus hengerfüggvények $p = 1$ esetben sorba fejthetőek.

Célunk a (2.24) egyenlet megoldásának hatványsorba fejtése

$$\mathrm{se_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{i(p+1)+1} = d_0 x + d_1 x^{p+2} + d_2 x^{2p+3} + \cdots,$$

alakban és egy módszert adni a d_0, d_1, $d_2, \cdots$ együtthatók meghatározására. A (2.24) differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéskor szükségünk van az $\mathrm{se_p}(x)$-re, $\mathrm{se_p}'(x)$-re illetve $\mathrm{se_p}''(x)$-re. Ezeket az egyenleteket a következőképpen tudjuk megadni:

$$\begin{aligned} \mathrm{se_p}'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^{i(p+1)+1}, \quad f_i \in \mathbf{R}\ ,\ i = 0,1,2,\cdots, \\ \mathrm{se_p}''(x) &= x^p \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^{i(p+1)+1}, \quad g_i \in \mathbf{R}, \quad i = 0,1,2,\cdots. \end{aligned}$$

Az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételekből meghatározzuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{se_p}(0) &= 0, \\ \mathrm{se_p}'(0) &= f_0 = 1, \end{aligned}$$

majd a d_i, f_i, g_i $(i = 0,1,2,\cdots)$ együtthatók között a következő összefüggéseket tudjuk megadni:

$$\begin{cases} f_i &= d_i(i(p+1)+1), \\ g_i &= f_{i+1}(i+1)(p+1), \quad i = 0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

$i = 0$ esetén

$$d_0 = \frac{f_0}{1} = 1$$

együtthatókat kapjuk és a (2.24) differenciálegyenletből

$$g_0 = 1$$

adódik.
A 2.24 egyenlet ezen összefüggések felhasználásával a következő alakba írható:

$$[\mathrm{se_p}'(x)]^{p-1} \cdot \mathrm{se_p}''(x) + (a - 2q\,\mathrm{S_p}'(2x))[\mathrm{se_p}(x)]^p = 0. \tag{2.25}$$

Az együtthatók meghatározására itt is a függvény elaszticitását alkalmazzuk (lásd 2.6. fejezet).
Az $E(\mathrm{se_p}(x))$ meghatározása:

$$E(\mathrm{se_p}(x)) = E\left(x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{i(p+1)}\right) = 1 + (p+1) \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} d_i \cdot x^{i(p+1)}},$$

melyre figyelembevéve, hogy $d_0 = 1$ és elvégezve az osztást, a következő összefüggést kapjuk:

$$E(\mathrm{se_p}(x)) = 1 + (p+1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} D_k x^{k(p+1)},$$

ahol

$$D_k = k \cdot d_k - \sum_{i=1}^{k-1} D_i \cdot d_{k-i}, \quad k = 1, 2, 3 \cdots .$$

Hasonlóan

$$E(\mathrm{se_p}') = E\left(x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^{i(p+1)}\right) = (p+1) \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i \cdot x^{i(p+1)}},$$

ahol $f_0 = 1$ figyelembevételével, az osztás elvégezése után

$$E(\mathrm{se_p}'(x)) = (p+1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot x^{k(p+1)}$$

adódik, ahol

$$F_k = k \cdot f_k - \sum_{i=1}^{k-1} F_i \cdot f_{k-i}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Továbbá

$$\begin{aligned} E(\mathrm{se_p}''(x)) &= p + (p+1)\cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \cdot i \cdot x^{i(p+1)}}{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \cdot x^{i(p+1)}} \\ &= p + (p+1)\cdot \sum_{k=1}^{\infty} G_k x^{k(p+1)}, \end{aligned}$$

ahol

$$G_k = -k\cdot g_k + \sum_{i=1}^{k-1} G_i \cdot g_{k-i}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

A fenti összefüggéseket felhasználva a (2.25) differenciálegyenlet a következő alakba írható:

$$(p-1)E(\mathrm{se_p}'(x)) + E(\mathrm{se_p}''(x)) = pE(\mathrm{se_p}(x)) - \frac{2q\,\mathrm{S_p}'(2x)}{a - 2q\,\mathrm{S_p}'(2x)} E(\mathrm{S_p}'(2x)).$$

ahol $\mathrm{se_p}$-t, mint elliptikus hengerfüggvényt tekintjük, illetve $\mathrm{S_p}'$-vel egy általánosított szinusz függvény deriváltját jelöljük. Az $E(\mathrm{se_p}(x))$, $E(\mathrm{se_p}'(x))$, és $E(\mathrm{se_p}''(x))$ hatványsor alakú kifejezéseinek behelyettesítése után x azonos hatványainak együtthatóit összehasonlítva a következő összefüggést kapjuk:

$$G_k = p\cdot D_k - (p-1)\cdot F_k + H_k, \quad k = 1, 2, 3, \cdots ,$$

ahol

$$H_k = \frac{2q}{a-2q} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left[b_{k-i} \cdot \left(F_i + G_i - p\cdot D_i - B_i \cdot 2^{i(p+1)} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Innen

$$\begin{aligned} g_k &= p\cdot d_k - (p-1)\cdot f_k - H_k \\ &- \frac{2q}{k(a-2q)} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left[(p-1)\cdot F_i \cdot f_{k-i} - G_i \cdot g_{k-i} - p\cdot D_i \cdot d_{k-i} \right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Így az együtthatók $i = 0$ esetben a következők lesznek:

$$d_0 = 1\ ,\ f_0 = 1\ ,\ g_0 = 1,$$

majd $i = 1$ esetén:

$$f_1 = \frac{g_0}{p+1} = \frac{1}{p+1},$$
$$d_1 = \frac{b_1}{p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)},$$

és

$$D_1 = d_1 \ , \ F_1 = f_1 \ , \ G_1 = -g_1.$$

A g_k, f_k, d_k együtthatók közti összefüggést használva az $\mathrm{se_p}(x)$, $\mathrm{se_p}'(x)$ és $\mathrm{se_p}''(x)$ hatványsorok együtthatói előállíthatóak. Innen kapjuk a

$$g_1 = \frac{2-p^2}{(p+1)(p+2)}$$

értéket. Ezek után a többi együttható is kiszámítható (2.26)-ból, vagyis a (2.24) differenciálegyenlet

$$\mathrm{se_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{i(p+1)+1}$$

megoldásának sorfejtéses alakjában minden d_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ együttható minden $p > 0$ érték esetén megadható.

Példa: Tekintsük az $a = 2$, $q = 0,5$, $p = 0,5$ esetben a (2.24) differenciálegyenlet megoldását az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételek mellett, ami ezen feltételekkel a következő alakú:

$$\left(|y'|^{-0,5} y'\right)' + (2 - \mathrm{S_{0,5}}'(2x))\,|y|^{-0.5}\, y = 0.$$

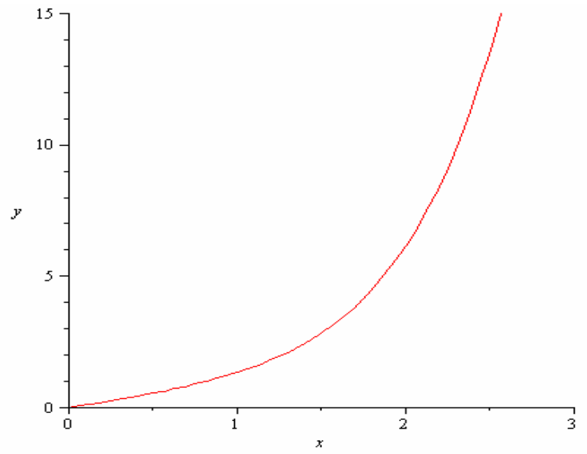
Ekkor a (2.24) differenciálegyenletben szereplő általánosított szinusz függvény derivált függvényére:

$$\mathrm{S_{0,5}}'(x) = 1 - 0,6666x^{1,5} + 0,1555x^3 - 0,0171x^{4,5} + 0,0013^6 - \cdots$$

és a numerikus számítások után, melyet MAPLE-ben megírt programmal végeztünk el, a keresett probléma hatványsor alakú megoldása:

$$\mathrm{se_{0,5}}(x) = x + 0,2666x^{2,5} + 0,0388x^4 + 0,0449x^{5,5} + \cdots .$$

A 2.9. ábrán $se_{0,5}(x)$-t szemléltetjük.



2.9. ábra

3 Hárompontos peremérték feladatok megoldásainak vizsgálata

Ebben a fejezetben a következő hárompontos peremérték problémát tekintjük:

$$x'' + \lambda x + g(t, x) = h(t), \quad x(0) = 0, \;\; B_\eta x = 0. \tag{3.1}$$

A feladat megoldásainak létezését vizsgáljuk, ahol $(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ paraméterek, g, h adott függvények és

$$B_\eta x := \begin{cases} x(\eta) - x(\pi) & , \quad \eta \neq \pi, \\ x'(\pi) & , \quad \eta = \pi. \end{cases}$$

Szükséges és elégséges feltételeket adunk g-re és h-ra úgy, hogy a (3.1) feladatnak az adott feltételekkel létezzen megoldása. A felírt problémát tekinthetjük úgy, mint egy nemlineáris oszcillátor mozgásegyenletét, ami számos mechanikai és folyadékáramlási probléma esetén előfordul.

Ebben a fejezetben bemutatott eredményeket a pilzeni egyetem oktatóival Pavel Drábekkel, Petr Nečesallal és Jan Čepičkával közös [RE2], [RE4] dolgozatokban publikáltuk.

3.1 A Homogén eset

Azokat az $(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ számpárokat vizsgáljuk, amelyek esetén a

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad B_\eta x = 0 \tag{3.2}$$

peremérték feladatnak létezik nullától különböző valós megoldása.

3.1. Definíció: *Definiáljuk a σ halmazt a következőképpen:*

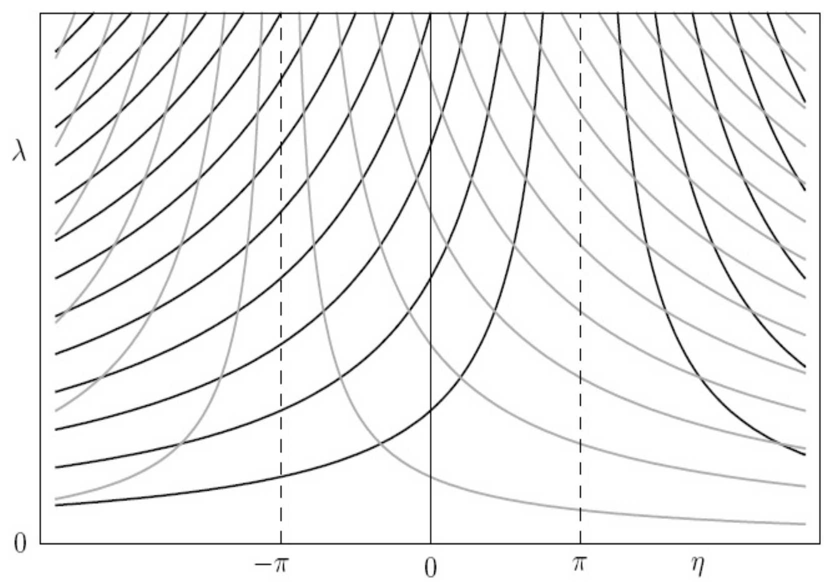
$$\sigma := \{(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2 | \text{ úgy, hogy a (3.2) feladatnak létezik zérustól különböző } x = x(t),\ t \in \mathbf{R} \text{ valós megoldása}\}.$$

A [RE2] és [RE4] cikkekben megjelent eredményeink alapján megállapítható a következő tétel:

3.2. Tétel: *A (3.2) homogén differenciálegyenlet peremérték feladatának akkor és csak akkor létezik zérustól különböző megoldása, ha $(\eta, \lambda) \in \sigma$, ahol*

$$\begin{aligned}
\sigma &= \bigcup_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} C_{2k} \cup \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} C_{2j+1}, \\
C_{2k} &= \left\{ (\eta, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ | (\pi - \eta)\sqrt{\lambda} = 2k\pi \right\}, \\
C_{2j+1} &= \left\{ (\eta, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ | (\pi + \eta)\sqrt{\lambda} = (2j+1)\pi \right\}.
\end{aligned}$$

A 3.1. ábrán a σ halmazt MATLAB-ban megírt programmal ábrázoljuk.

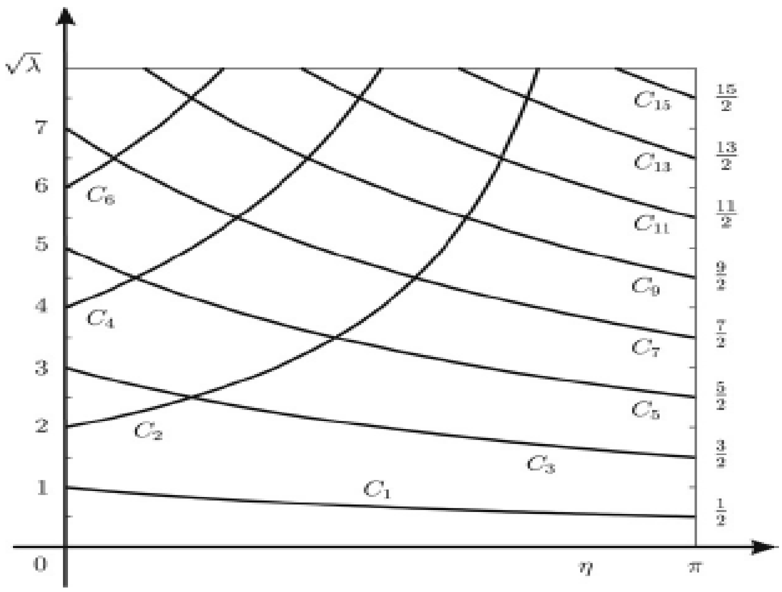


3.1. ábra : A σ halmaz

Részletezzük η helyzetétől függően a σ halmazt az alábbiakban:

1. Ha $\eta < -\pi$, akkor $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{2k} \cup \bigcup_{j=-\infty}^{-1} C_{2j+1}$.
2. Ha $\eta = -\pi$, akkor $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{2k} = \{(-\pi, k^2) : k \in \mathbb{N}\}$.
3. Ha $-\pi < \eta < \pi$, akkor $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{2k} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} C_{2j+1}$.
4. Ha $\eta = \pi$, akkor $\sigma = \bigcup_{j=0}^{\infty} C_{2j+1} = \left\{\left(\pi, \frac{(2j+1)^2}{4}\right) : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$.
5. Ha $\eta > \pi$, akkor $\sigma = \bigcup_{k=-\infty}^{-1} C_{2k} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} C_{2j+1}$.

A 3.2. ábrán a σ halmazt a $[0, \pi]$ intervallumon ábrázoltuk, megadva az itt lévő konkrét C_{2k} illetve C_{2j+1} görbéket. Az ábrát egy MATLAB-ban megírt programmal készítettük.



3.2. ábra : A σ halmaz

3.3. Definíció: *Definiáljuk a $\widehat{\sigma}$ halmazt a következőképpen:*

$$\widehat{\sigma} = \{(\eta, \lambda) \in \sigma, \exists j \in \mathbf{Z} \text{ és } k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\} |\ (\eta, \lambda) \in C_{2k} \cap C_{2j+1}\}.$$

Tehát $(\eta, \lambda) \in \widehat{\sigma}$ akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$\eta = \eta_{j,k} := \frac{2j - 2k + 1}{2j + 2k + 1}\pi, \quad j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\},$$

továbbá bármely $i = 0, 1, 2, \cdots$ esetén $\eta_{j,k}$ felírható az alábbi alakban:

$$\eta_{j,k} = \eta_{(2i+1)j+i,(2i+1)k}.$$

Bármely $(\eta, \lambda) \in \widehat{\sigma}$ esetén felírható, hogy $\lambda_i = (2i+1)^2\lambda$ esetén $(\eta, \lambda_i) \in \widehat{\sigma}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$.

3.2 Az inhomogén eset

Ebben a részben szükséges és elégséges feltételeket adunk az

$$x'' + \lambda x = h, \quad x(0) = 0, \quad B_\eta x = 0 \tag{3.3}$$

feladat megoldásainak létezésére.

A [RE2] és a [RE4] cikkekben meghatározott összefüggéseink alapján a következő tételeket mondhatjuk ki:

3.4. Tétel: *Ha $(\eta, \lambda) \notin \sigma$, akkor a konstansvariációból következik, hogy a (3.3) inhomogén problémának létezik egyértelmű megoldása bármely $h \in L^1_{loc}\mathbf{R}$ esetén.*

3.5. Megjegyzés: *Az $f \in L^1_{loc}(\mathbf{\Theta})$ jelölés azt jelenti, hogy $f \in L^1_{loc}(\mathbf{\Gamma})$ minden $\Gamma \subset \Theta$ kompakt részhalmaz esetén.*

3.6. Tétel: *Ha $(\eta, \lambda) \in \sigma$, akkor a konstansvariációból következik az is, hogy a (3.3) feladatnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha*

$$\int_{\mathcal{I}_\eta} h(t)\psi(t)dt = 0$$

fennáll, ahol

$$\mathcal{I}_\eta := \begin{cases} (\eta, \pi), & ha \quad \eta < 0, \\ (0, \pi), & ha \quad 0 \le \eta \le \pi, \\ (0, \eta), & ha \quad \eta > \pi, \end{cases}$$

ψ és $\mathcal{I}_\eta$ is függ η elhelyezkedésétől, továbbá η-tól függően ψ megadása a következő

1) Legyen $\eta < 0$, $\eta \ne -\pi$ és $(\eta, \lambda) \in \sigma$. Az $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, vagy $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, $j = -1, -2, -3, \cdots$, ha $\eta < -\pi$, és $j = 0, 1, 2, \cdots$ ha $-\pi < \eta < 0$. Ekkor $\psi = \psi_{2k}$, ha $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$ és $\psi = \psi_{2j+1}$ ha $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, ahol

$$\psi_{2k}(t) = \sin \frac{2k\pi}{\pi - \eta}(\pi - t), \quad t \in (\eta, \pi)$$

$$\psi_{2j+1}(t) = \begin{cases} -\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi+t), & t \in (\eta, 0) \\ -\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi-t), & t \in [0, \pi). \end{cases}$$

2) Legyen $\eta = -\pi$ és $(-\pi, \lambda) \in \sigma$. Ebben az esetben $\lambda = k^2$, $\psi = \psi_{2k}$, ahol

$$\psi_{2k}(t) = \sin k(\pi - t), \quad t \in (-\pi, \pi).$$

3) Legyen $0 \leq \eta < \pi$ és $(\eta, \lambda) \in \sigma$. Az $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$, vagy $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$.

Ekkor $\psi = \psi_{2k}$, ha $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$ és $\psi = \psi_{2j+1}$, ha $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, ahol

$$\psi_{2k}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \eta), \\ \sin\dfrac{2k\pi}{\pi-\eta}(\pi-t), & t \in [\eta, \pi), \end{cases}$$

$$\psi_{2j+1}(t) = \begin{cases} 2\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}\pi\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t, & t \in (0, \eta), \\ -\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi-t), & t \in [\eta, \pi). \end{cases}$$

4) Legyen $\eta = \pi$ és $(\pi, \lambda) \in \sigma$. Ebben az esetben $\lambda = \frac{(2j+1)^2}{4}$, $\psi = \psi_{2j+1}$, ahol

$$\psi_{2j+1}(t) = \sin\frac{2j+1}{2}t, \ \ t \in (0, \pi).$$

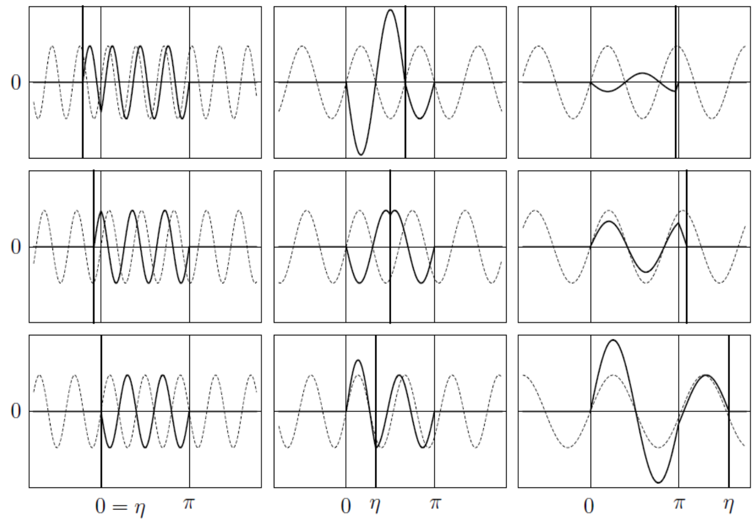
5) Legyen $\eta > \pi$ és $(\eta, \lambda) \in \sigma$. Az $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$, $k = -1, -2, -3, \cdots$ vagy $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$.

Ekkor $\psi = \psi_{2k}$ ha $(\eta, \lambda) \in C_{2k}$ és $\psi = \psi_{2j+1}$ ha $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, ahol

$$\psi_{2k}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \pi), \\ \sin\dfrac{2k\pi}{\pi-\eta}(\pi-t), & t \in [\pi, \eta), \end{cases}$$

$$\psi_{2j+1}(t) = \begin{cases} 2\cos\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}\pi\sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t, & t \in (0, \pi), \\ \sin\dfrac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi+t), & t \in [\pi, \eta). \end{cases}$$

A 3.3. ábrán szaggatott vonallal $\varphi(t)$-t (a (3.3) peremértékfeladat nem zérus megoldása), míg folytonos vonallal $\psi_5(t)$-t ábrázoltuk úgy, hogy $(\eta, \lambda) \in C_5$.



3.3. ábra

3.7. Tétel: *Legyen* $(\eta,\lambda) \in \sigma$, *és* ψ *a fentiekben adott függvény,* φ *pedig a (3.2) homogén differenciálegyenlet peremérték feladatának nem zérus megoldása, akkor a*

$$\int_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt = 0$$

feltétel akkor és csak akkor áll fenn, ha $(\eta,\lambda) \in \widehat{\sigma}$.

Bizonyítás: Legyen $(\eta,\lambda) \in C_{2k}$, $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$. Az $\eta \neq \pi$ esetén, ha $\eta < \pi$ akkor tekintsük

$$\int_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt = \int_{\eta}^{\pi} \varphi(t)\psi(t)dt = \frac{\eta-\pi}{2}\cos\frac{2k\pi}{\pi-\eta}\pi =: J_1(\eta).$$

Másrészt, ha $\eta > \pi$, akkor

$$\int_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt = \int_{\pi}^{\eta} \varphi(t)\psi(t)dt = -J_1(\eta).$$

A $J_1(\eta) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{2k\pi}{\pi-\eta} = \frac{1}{2} + k + j, \quad j \in \mathbf{Z}, \text{ azaz } \eta = \eta_{j,k,\cdot},$$

ez ekvivalens az $(\eta, \lambda) \in \widehat{\sigma}$ összefüggéssel.

Legyen most $(\eta, \lambda) \in C_{2j+1}$, $j \in \mathbf{Z}$. Az $\eta \neq -\pi$ esetén, ha $\eta < 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt &= \int\limits_{\eta}^{\pi} \varphi(t)\psi_{2j+1}(t)dt \\
&= -\int\limits_{\eta}^{0} \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi+t)dt \\
&- \int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi-t)dt \\
&= \frac{\pi+\eta}{2}\cos\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}\eta =: J_2(\eta).
\end{aligned}$$

Másrészt, ha $0 \leq \eta < \pi$, akkor

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt &= \int\limits_{0}^{\pi} \varphi(t)\psi_{2j+1}(t)dt \\
&= \int\limits_{0}^{\eta} 2\cos\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}\pi \sin^2\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}tdt \\
&- \int\limits_{\eta}^{\pi} \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi-t)dt = J_2(\eta).
\end{aligned}$$

Ha $\eta = \pi$, akkor

$$\int\limits_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}tdt = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Illetve, ha $\eta > \pi$, akkor

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{I}_\eta} \varphi(t)\psi(t)dt &= \int\limits_{0}^{\eta} \varphi(t)\psi_{2j+1}(t)dt \\
&= \int\limits_{0}^{\pi} 2\cos\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}\pi \sin^2\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}tdt \\
&+ \int\limits_{\pi}^{\eta} \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}t \sin\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta}(\pi+t)dt = J_2(\eta).
\end{aligned}$$

Végül $J_2(\eta) = 0$, $\eta \neq \pi$ esetén akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{(2j+1)\pi}{\pi+\eta} = \frac{1}{2} + j - k, \quad k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}, \text{azaz } \eta = \eta_{j,k,\cdot},$$

amely ekvivalens az $(\eta, \lambda) \in \widehat{\sigma}$ összefüggéssel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

3.8. Megjegyzés: *Legyen $h \in X := L^1(\mathcal{I}_\eta)$, akkor az*

$$x'' = h, \quad x(0) = 0, \quad B_\eta x = 0$$

peremérték feladatnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $X = T_\eta h$, ahol $T_\eta : X \to X$ leképezést a következőképpen definiáljuk, ha $\eta \neq \pi$:

$$(T_\eta h)(t) := \int_0^t (t-\tau)h(\tau)d\tau + \frac{t}{\pi-\eta}\left[\int_\eta^0 (\tau-\eta)h(\tau)d\tau - \int_0^\pi (\pi-\tau)h(\tau)d\tau\right]$$

és ha $\eta = \pi$:

$$(T_\eta h)(t) := \int_t^\pi (\tau - t)h(\tau)d\tau - \int_0^\pi \tau h(\tau)d\tau.$$

A $T_\eta : X \to W^{2,1}(\mathcal{I}_\eta)$ operátor lineáris, folytonos és

$$\mathrm{Im}T_\eta = \left\{x \in W^{2,1}(\mathcal{I}_\eta) | x(0) = 0,\ B_\eta x = 0\right\}.$$

Tehát a (3.3) feladatot tekinthetjük, mint az

$$x + \lambda T_\eta x = 0$$

operátor egyenletet x-ben. Most $(\eta, \lambda) \in \sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha T_η-nak $-1/\lambda$ egy valós sajátértéke.

3.3 Kezdetiérték probléma

Tekintsük a következő másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet az adott kezdeti feltételekkel:

$$x'' + \lambda x + g(t,x) = h(t), \quad x(\xi) = x_0,\ x'(\xi) = x_1, \tag{3.4}$$

ahol $\xi \in \mathbf{R}$ tetszőleges rögzített érték, $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, $g(t,s)$ Caratheodory függvény, azaz $g(t,\cdot)$ folytonos majdnem minden $t \in \mathbf{R}$ esetén és $g(\cdot,s)$ mérhető minden $s \in \mathbf{R}$ esetén, illetve létezik olyan m, $l \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, hogy bármely $s \in \mathbf{R}$ és majdnem minden $t \in \mathbf{R}$ esetén teljesül, hogy

$$|g(t,s)| \leq m(t) + l(t) \cdot |s| \,. \tag{3.5}$$

A (3.4) kezdetiérték feladatot írjuk fel az alábbi egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} x' = y \quad , & x(\xi) = x_0, \\ y' = -\lambda x - g(t,x) + h(t) \quad , & y(\xi) = x_1, \end{cases} \tag{3.6}$$

amelyet a következő alakba is írhatunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\xi) = (x_0, x_1), \tag{3.7}$$

ahol $\mathbf{x} = (x,y)$, $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = (y, -\lambda x - g(t,x) + h(t))$.

A g és a h függvényekre tett feltételekből következik, hogy $\mathbf{f}$ Caratheodory függvény és teljesül az

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})| \leq M(t) + L(t) \cdot |\mathbf{x}|$$

egyenlőtlenség majdnem minden $t \in \mathbf{R}$, illetve $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ esetén, ahol M, $L \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ függenek λ-tól és h, m, és $l \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$-től. A (3.7) probléma $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ megoldásának létezése a Schauder-féle fixpont tételből és a Gronwall lemmából következik. Tehát a (3.4) problémának létezik megoldása.

3.4 Ha nincs rezonancia

Ebben a részben tegyük fel, hogy $(\eta, \lambda) \notin \sigma$.

Tekintsük a következő hárompontos peremérték problémát:

$$x'' + \lambda x + g(t,x) = h(t), \quad x(0) = 0, \; x(\eta) = x(\pi). \tag{3.8}$$

3.9. Tétel: *Tételezzük fel, hogy $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, $g(t,s)$ Caratheodory függvény és létezik olyan $\delta \in [0,1)$, m, $l \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, hogy bármely $s \in \mathbf{R}$ és majdnem minden $t \in I_\eta$ esetén:*

$$|g(t,s)| \leq m(t) + l(t) \cdot \; |s|^\delta \,. \tag{3.9}$$

Akkor a (3.8) feladatnak létezik legalább egy $x \in W^{2,1}(I_\eta)$ megoldása.

A tétel bizonyítása a [RE14] dolgozatban található.

3.10. Megjegyzés: *A $W^{2,1}(\Theta)$ jelöli azon $u \in L^1(\Theta)$ függvények halmazát, amelyek $D^\alpha u$ deriváltja létezik és $L^1(\Theta)$-beli ($|\alpha| \le 2$) az $||u||_{W^{2,1}} = \sum_{|\alpha|\le 2} ||D^\alpha u||_{L^1}$ normával.*

3.11. Tétel: *Legyen $(\eta, \lambda) \notin \sigma$, $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ és g függvények teljesíti a (3.9) feltételt, akkor a*

$$x'' + \lambda x + g(t, x) = h(t), \quad x(0) = 0, \ B_\eta x = 0.$$

peremérték problémának létezik legalább egy megoldása.

A tétel bizonyítása a [RE4] dolgozatban található.

3.5 Ha van rezonancia

Ebben a részben tegyük fel, hogy $(\eta, \lambda) \in \sigma$.

Legyen ϕ a következő homogén peremérték feladatnak egy normalizált, zérustól különböző megoldása (sajátfüggvénye):

$$x'' + \lambda x = 0, \ x(0) = 0, \ B_\eta x = 0.$$

Létezik olyan $c \neq 0$ konstans, melyre $\phi = c\varphi$ és $\|\phi\| = 1$ fennáll, továbbá $\varphi = \sin \sqrt{\lambda} t$, $(\eta, \lambda) \in \sigma$ esetén, illetve:

$$\int_{\mathcal{I}_\eta} \phi(t)\psi(t)dt \ge 0.$$

Jelölje ψ az $(\eta, \lambda) \in \sigma$-hoz tartozó függvényt (lásd a 3.2. részben az inhomogén esetet). Tegyük fel a g függvényre, hogy bármely $s \in \mathbf{R}$ és majdnem minden $t \in \mathcal{I}_\eta$ esetén a

$$|g(t, s)| \le m(t), \ m \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \tag{3.10}$$

feltétel fennáll, továbbá majdnem minden $t \in \mathcal{I}_\eta$ esetén léteznek a következő határértékek:

$$g(t, \pm\infty) = \lim_{s \longrightarrow \pm\infty} g(t, s). \tag{3.11}$$

Továbbá tegyük fel, hogy:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}_\eta^+} g(t, +\infty)\psi(t)dt + \int_{\mathcal{I}_\eta^-} g(t, -\infty)\psi(t)dt < \int_{\mathcal{I}_\eta} h(t)\psi(t)dt < \\ \int_{\mathcal{I}_\eta^+} g(t, -\infty)\psi(t)dt + \int_{\mathcal{I}_\eta^-} g(t, +\infty)\psi(t)dt \end{aligned} \tag{3.12}$$

teljesül, ahol $\mathcal{I}_\eta^+ = \{t \in \mathcal{I}_\eta : \phi(t) > 0\}$ és $\mathcal{I}_\eta^- = \{t \in \mathcal{I}_\eta : \phi(t) < 0\}$.

3.12. Tétel: *Legyen $(\eta, \lambda) \in \sigma$, $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ és h, g függvények teljesítik a (3.10), (3.11) és (3.12) feltételeket, akkor az*

$$x'' + \lambda x + g(t, x) = h(t), \quad x(0) = 0, \; x(\eta) = x(\pi).$$

feladatnak létezik legalább egy megoldása.

A tétel bizonyítása a [RE4] dolgozatban megtalálható.

3.6 Bifurkációs probléma, többszörös megoldások

Tekintsük a következő

$$x'' + \lambda x + g(\lambda, t, x) = 0, \; x(0) = 0, \; B_\eta x = 0, \tag{3.13}$$

peremérték problémát, ahol $(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}$ paraméterek, $t \in \mathbf{R}$, $g = g(\lambda, t, s) : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ λ-ban és s-ben folytonos függvény majdnem minden t-re és t szerint mérhető minden λ és s-re.

Továbbá tegyük fel, hogy bármilyen zárt $\Lambda \subset \mathbf{R}$ esetén léteznek olyan $m, l \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ függvények, melyekre minden $\lambda \in \Lambda$, minden $s \in \mathbf{R}$ és majdnem minden $t \in \mathbf{R}$ esetén:

$$|g(\lambda, t, s)| \leq m(t) + l(t)|s|. \tag{3.14}$$

Továbbá tegyük fel, hogy bármely adott, zárt $\Lambda, \Gamma \subset \mathbf{R}$ esetén:

$$g(\lambda, t, s) = o(|s|), \; s \to 0, \tag{3.15}$$

$\lambda \subset \mathbf{R}$ szerint egyenletesen és $t \in \Gamma$. Nevezetesen, ha

$$g(\lambda, t, s) = 0, \; t \in \mathbf{R}, \; \lambda \in \mathbf{R},$$

akkor a (3.13) egyenletnek mindig van $x(t) \equiv 0 \in \mathbf{R}$ zérus megoldása. A (3.14) összefüggésből következik, hogy bármely $\xi \in \mathbf{R}$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén a

$$x'' + \lambda x + g(\lambda, t, x) = 0, \; x(\xi) = x_0, \; x'(\xi) = x_1, \tag{3.16}$$

peremérték problémának létezik globális megoldása $\mathbf{R}$-n. (Az állítás igazolása megtalálható a [RE4] dolgozat 3. fejezetében.)

Ha $\eta < 0$, akkor a peremérték feladat a következő:

$$x'' + \lambda x + g(\lambda, t, x) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\eta) = x(\pi). \tag{3.17}$$

A (3.17) feladat ekvivalens az

$$x + \lambda T_\eta x + T_\eta(G(\lambda, x)) = 0, \tag{3.18}$$

operátor egyenlettel, ahol $G : \mathbf{R} \times X \to X$ Nemytskii operátor g-ben.

3.13. Definíció. *Legyen f Caratheodory függvény és $u : \Omega \to \mathbf{R}^m$ adottak. Definiáljuk az $F(u) : \Omega \to \mathbf{R}$ függvényt, melyre*

$$F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Az így definiált F-t Nemytskii operátornak nevezzük.

A $T_\eta : X \to W^{2,1}(\mathcal{I}_\eta)$ operátor lineáris, folytonos és

$$\mathrm{Im}T_\eta = \left\{x \in W^{2,1}(\mathcal{I}_\eta) | x(0) = 0,\ B_\eta x = 0\right\}.$$

$T_\eta G$ kompakt és (3.15) miatt adott $\Lambda \subset \mathbf{R}$ esetén

$$G(\lambda, x) = o(\|x\|), \quad \|x\| \to 0$$

$\lambda \in \Lambda$ esetén teljesül. A globális Rabinowitz és Dancer-féle bifurkációs tételek szerint (lásd [22] 5.2.34-es tétel 295. oldal és 5.2.38-as tétel 300. oldal) megkapjuk a (3.18) egyenlet zérustól különböző megoldásait.

Tekintsük a

$$f(\lambda, x) := x + \lambda T_\eta x + T_\eta(G(\lambda, x))$$

függvényt és az

$$\mathcal{S} = \overline{\{(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times X | x \neq 0,\ f(\lambda, x) = 0\}}.$$

halmazt. Ha rögzítjük az $(\eta, \lambda_0) \in \sigma \backslash\ \widehat{\sigma}$-t, akkor a T_η operátor $-1/(\lambda_0)$ sajátértékének multiplicitása 1 (lásd [RE4] 2. fejezet). A Rabinowitz és Dancer-féle bifurkációs eredményeket $(\eta, \lambda_0) \in \widehat{\sigma}$ esetén nem lehet alkalmazni, mivel a T_η operátor $-1/(\lambda_0)$ sajátértékének multiplicitása 2. Viszont ebben az esetben a (3.17) nem triviális megoldásainak a létezése $(\lambda_0, 0)$-ból bifurkálva bizonyítható, ha g függvény simaságára további feltételeket teszünk.

Tekintsük

$$g(\lambda, t, s) = \lambda(\sin s - s)$$

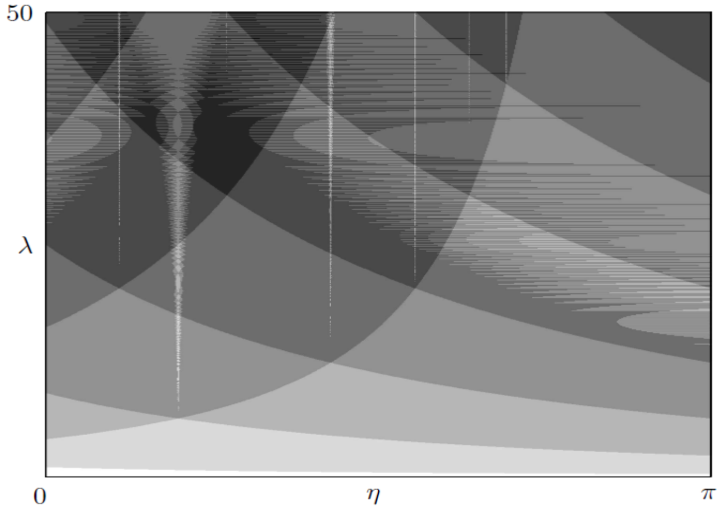
függvényt. Valójában ezek sokaságának létezése λ-ra vonatkozóan a

$$x'' + \lambda \sin x = 0 \quad x(0) = 0,\ B_\eta x = 0 \tag{3.19}$$

feladat megoldásainak multiplicitását adja.

3.6.1 Az algoritmus

Megadunk egy numerikus algoritmust, mellyel a (3.19) egyenlet megoldásainak számát tudjuk meghatározni. A (3.19) egyenlet I_η-ban előírt számú zérushelyű megoldások száma szerint osztályozhatunk, amikor (η, λ) az $\mathbb{R}^2 \backslash \sigma$ egyik adott komponenséhez tartozik. Leírjuk azt a módszert, amivel előállítjuk a 3.5. ábrán látható bifurkációs diagramot, ahol a szürke részek reprezentálják a (3.19) feladat zérustól különböző megoldásainak a számát. A diagramon az egyre erősebb szín a megoldások számának növekedését jelenti.



3.4. ábra Bifurkációs diagram

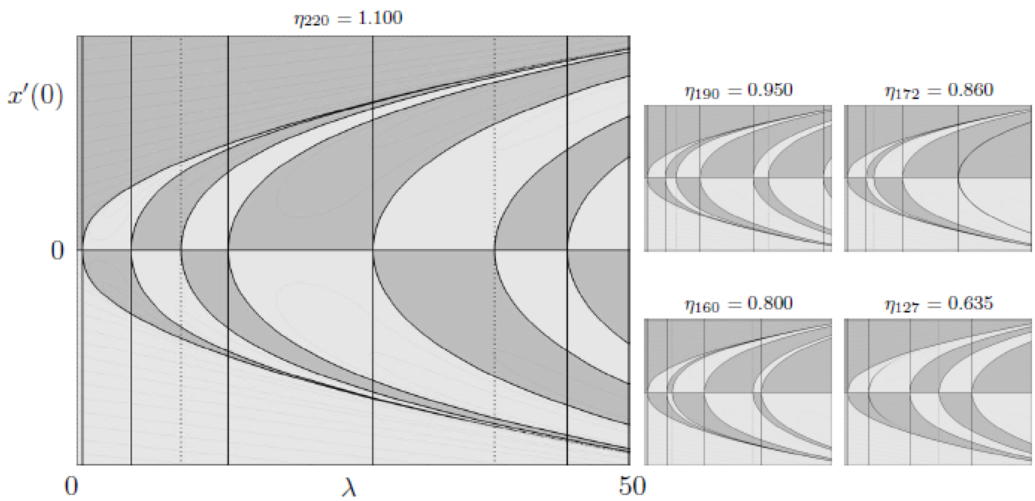
Legyenek $\eta_{\min} < \eta_{\max}$, $\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$ és $x^1_{\min} < x^2_{\max}$ rögzítettek.

1. Első lépésként előállítjuk az $[\eta_{\min},\ \eta_{\max}] \times [\lambda_{\min},\ \lambda_{\max}] \times [x^1_{\min},\ x^2_{\max}]$-nek a $\{(\eta_i, \lambda_j, x^1_k) | i = 0, ..., n_\eta,\ j = 0, ..., n_\lambda, k = 0, ..., n_{x^1}\}$ hálóját egyforma lépésközökkel $n_\eta \cdot n_\lambda \cdot n_{x^1}$ számú elemmel.

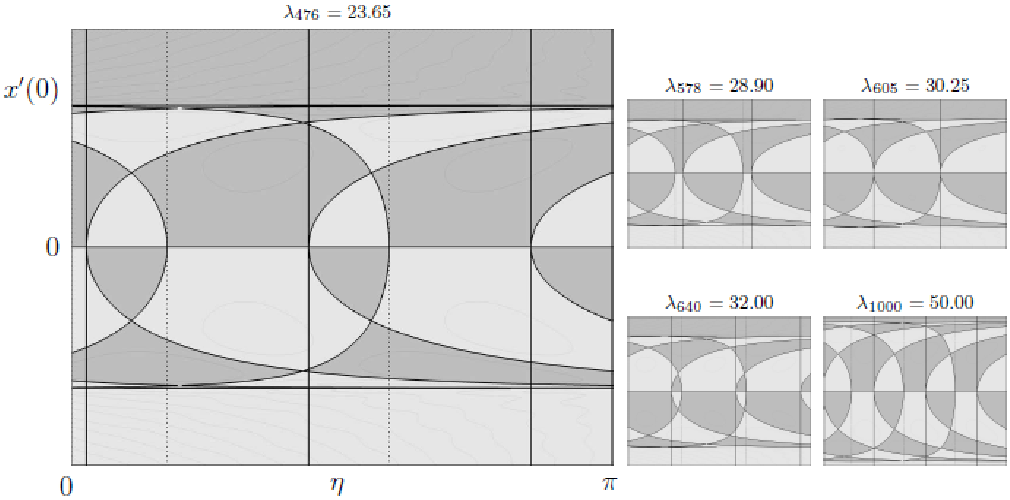
2. Második lépésben $i = 0, ..., n_\eta$, $j = 0, ..., n_\lambda$ és $k = 0, ..., n_{x^1}$ esetén definiáljuk az
$$x_{i,j,k} := sign\left(B_{\eta_i} x\right),$$
függvényt, ahol x a
$$x'' + \lambda_j \sin x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x^1_k$$
peremérték feladat megoldása.

3. Rögzített η_i-k esetén megadjuk a (λ, x^1) síkon a megoldásdiagramokat úgy, hogy meghatározzuk $x_{i,\cdot,\cdot}$ kontúrvonalait. (lásd 3.5. ábra) Az $x_{\cdot,j,\cdot}$-hoz tartozó zéró kontúr vonalak szemléltetik a megoldás diagramokat (λ, x^1) síkon rögzített λ_j-k esetén (lásd 3.6. ábra). Megjegyezzük, hogy a világos (sötét) szürke szín a 3.5. és 3.6. megoldás diagramokon azt jelenti, hogy $x_{i,j,k} = 1$ $(x_{i,j,k} = -1)$. Az ábrákat MATHEMATICA-ban megírt programokkal készítettük.

4. Végül a (η, λ) síkon a bifurkációs diagramot aszerint adjuk meg, hogy hány előjelváltása van $x_{i,j,\cdot}$-nak. Azaz $i = 0, ..., n_\eta$, $j = 0, ..., n_\lambda$ esetén az $x_{i,j,\cdot}$ előjelváltásainak száma meghatározza a (3.19) megoldásainak számát, ha $\eta = \eta_i$ és $\lambda = \lambda_j$.



3.5. ábra A megoldásdiagramok fix $\eta = \eta_{127}, \eta_{160}, \eta_{172}, \eta_{190}, \eta_{220}$ esetén.



3.6. ábra A megoldásdiagramok fix $\lambda = \lambda_{476}, \lambda_{578}, \lambda_{605}, \lambda_{640}, \lambda_{1000}$ esetén.

3.14. Megjegyzés: *Legyen* $(\eta, \lambda) \in [0, \pi) \times \mathbf{R}$ *adott. A (3.19) feladatnak pontosan* $2p$ *zérustól különböző megoldása létezik, ahol*

$$p = card\left\{\left(\eta, \widetilde{\lambda}\right) \in \sigma : \widetilde{\lambda} < \lambda\right\}. \tag{3.20}$$

3.15. Következmény: *Rámutatunk a (3.20) számosság néhány tulajdonságára azért, hogy a (3.19) probléma zérustól különböző megoldásainak számát könnyen meg tudjuk határozni fix* $(\eta, \lambda) \in [0, \pi) \times \mathbf{R}$ *esetén.*

1. *A* p *értéke korlátos, azaz*

$$0 \leq p \leq \overline{k} + \overline{j} + 1,$$

ahol

$$\overline{k} := \max\left\{k \in \mathbf{N} | \left(\frac{2k\pi}{\pi - \eta}\right)^2 < \lambda\right\},$$

$$\overline{j} := \left\{j \in \mathbf{N} \cup \{0\} | \left(\frac{(2j+1)\,\pi}{\pi + \eta}\right)^2 < \lambda\right\}.$$

2. *Továbbá, ha* $\eta \in [0, \pi) \setminus \Theta$*, ahol*

$$\Theta := \{\eta_{j,k} | j, k \in \mathbf{N},\ 2k < 2j + 1\},$$

akkor $p = \overline{k} + \overline{j} + 1$ *tetszőleges* λ *érték esetén. Másrészt, ha* $\eta \in \Theta$*, akkor* $p < \overline{k} + \overline{j} + 1$ *elegendően nagy.*

3. *A (3.20)-ból p számossága $2(m-n)$-nel egyenlő, ahol m és n a következőképpen adott:*

$$m = card\left\{(\eta, \widetilde{\lambda}) \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_{2k} | \widetilde{\lambda} < \lambda\right\} + card\left\{(\eta, \widetilde{\lambda}) \in \bigcup_{j=0}^{+\infty} C_{2j+1} | \widetilde{\lambda} < \lambda\right\},$$

$$n = card\left\{(\eta, \widetilde{\lambda}) \in \hat{\sigma} | \widetilde{\lambda} < \lambda\right\}.$$

4 Folyadék mechanikai alkalmazás

4.1 Bevezetés

Általában egy gáz vagy folyadék lamináris áramlása folyamán a közeg egyes rétegei különböző sebességgel áramlanak. A folyadékok viselkedését parciális differenciálegyenlet-rendszerrel lehet leírni, mely a folytonossági egyenletből, a Navier-Stokes egyenletből és az energia megmaradás elvéből vezethető le.

4.2 A nemnewtoni közegek

Az olyan folyadékokat, amelyek a Newton-féle viszkozitási törvénnyel írhatóak le *newtoni folyadékoknak* nevezzük. Newtoni folyadékok a mérnöki gyakorlatban is előforduló közegek egy része, az összes légnemű halmazállapotú közeg és a cseppfolyós halmazállapotú közegek nagy része.

A newtoni folyadékokban keletkező csúsztatófeszültség a deformációsebességgel arányos:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\gamma}{dt},$$

ahol τ_{yx} az y normálisú síkon ébredő x irányú csúsztatófeszültséget jelöli, v_x a sebesség x irányú komponense, μ a folyadék viszkozitási tényezője, illetve a $d\gamma/dt$ is a deformációsebességet jelöli. Newtoni folyadék például a víz, míg newtoni közeg a levegő.

Számos olyan folyadék van, amelyeknél a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség között nemlineáris kapcsolat van. Ezeket a folyadékokat *nemnewtoni közegeknek* nevezzük. Sokféle nemnewtoni anyagot ismerünk, melyek fontossága például az élelmiszer- és kozmetikaiparban is jelentős. Tulajdonságaik megismerésével foglalkozó tudományág a reológia. Az említett anyagoknál a μ viszkozitás egy konstans értékkel nem adható meg. Számos polimer, illetve polimerolvadék is nemnewtoni tulajdonságokkal rendelkezik. Továbbá nemnewtoni folyadékok közé sorolható a ketchup, a vizes keményítő szuszpenziók, a festékek, a vér és a samponok.

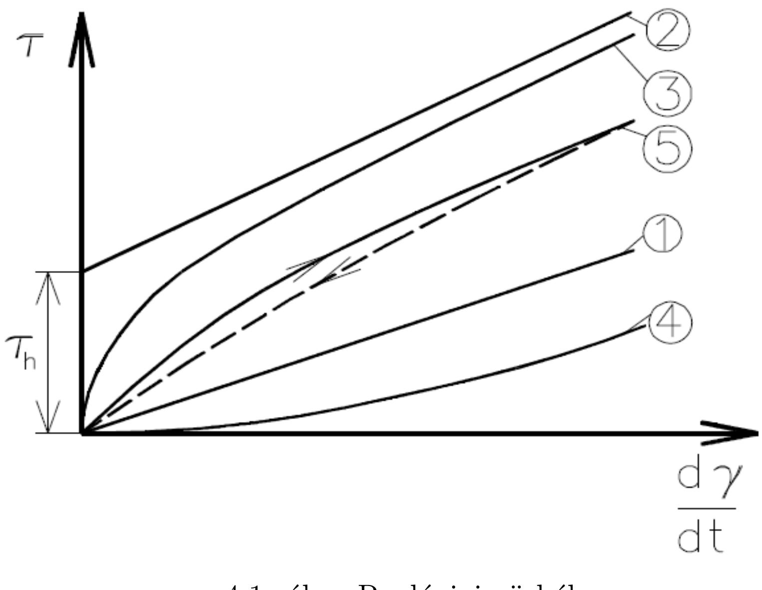
Mi az olyan folyadékokal foglalkozunk, ahol a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség közötti kapcsolatot hatványfüggvénnyel szokás jellemezni, ezért ezeket hatványközegeknek nevezzük. Az őket leíró összefüggés

$$\tau_{xy} = \eta_0 \cdot \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy}, \tag{4.1}$$

ahol η_0 és n két paraméter, amelyek az anyagra jellemző adatok.

- Ha $n < 1$, a közeget ún. *pszeudoplasztikus közegnek* nevezzük, melyek általában hosszú láncú molekulákat tartalmaznak. E molekulák elrendeződéséig a deformációsebesség adott növekedéséhez nagy csúsztatófeszültség-változás tartozik, ezt követően a csúsztatófeszültség-változás csökken. Ilyen tulajdonsággal rendelkezik például a tej, a tejszín, a sűrített paradicsom, a festékek, a fogpép és a polimer olvadékok.
- Ha $n > 1$, akkor *dilatáló közegről* beszélünk. Ilyen például az ásványi porokat tartalmazó zagy.
- Az $n = 1$ speciális esetben kapjuk a *newtoni folyadékokat*, mint például a víz.

Az 4.1 ábra a különböző közegek reológiai görbéit mutatja be, amelyek a folyadékban keletkező τ csúsztatófeszültség és a $d\gamma/dt$-vel jellemzett deformációsebesség kapcsolatát mutatják meg. Az 1-es jelű görbe newtoni közegre vonatkozik, a 2-es jelű plasztikus folyadékra. Az utóbbinál egy meghatározott τ_h határ-csúsztatófeszültség elérése után kezd a közeg folyamatosan deformálódni. A 3-as jelű görbe a pszeudoplasztikus, a 4-es a dilatáló, az 5-ös pedig a tixotróp közeget jellemzi (Lajos [38]).



4.1. ábra Reológiai görbék

4.3 Hőmérséklettől függő viszkozitás

A folyadékok viszkozitása általában exponenciálisan csökken a hőmérséklet növekedésével. A dinamikus viszkozitás hőmérséklet-függését az

$$\eta_0(T) = \eta_A e^{\frac{A}{RT}} \tag{4.2}$$

Arrhenius összefüggéssel szokás jellemezni, ahol η_A anyagi állandó [Pa/s]. A (4.2) összefüggésben az A a viszkozitás aktiválási energiája [J/mol]-ban, $R = 8,314$ J/(mol K) az egyetemes gázállandó, T a hőmérséklet [K].

Ha az anyagok viszkozitásának a logaritmusát a hőmérséklet reciprokának a függvényében ábrázoljuk megközelítőleg egyeneseket kapunk. Ezeknek az egyeneseknek az iránytangensei arányosak az adott folyadék viszkozitásának aktiválási energiájával.

Az 4. fejezet további részében nemnewtoni folyadék áramlását vizsgáljuk hőmérséklettől függő viszkozitás esetén.

4.3.1 Nem izotermikus folyás csőben

Ebben a fejezetben viszkózus folyadék lamináris áramlásakor fellépő hővezetést és hőfejlődést vizsgáljuk kör keresztmetszetű véges hosszúságú egyenes csőben. Hengerkoordinátákat alkalmazunk. Jelen esetben állandósult nyomás hatására létrejövő áramlással foglalkozunk, ezért a felírt egyenletekben az idő szerinti deriváltak zérusak. Feltesszük továbbá, hogy a sebességvektor egyetlen olyan összetevője, amely nem nulla: v_z (v_Θ a hengerszimmetria miatt nulla, v_r pedig elhanyagolhatóan kicsi). A tömegerőket szintén nem vesszük figyelembe.
Ezek alapján a folytonossági egyenlet a következő alakba írható fel:

$$\varrho \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_z \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) = 0, \tag{4.3}$$

az energiaegyenlet a következő:

$$\varrho v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right], \tag{4.4}$$

az impulzusegyenlet pedig:

$$\varrho c_p v_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \tag{4.5}$$

ahol T a hőmérsékletet, ρ a sűrűséget, P a nyomást, c_p az állandó nyomáson mért fajhőt és k a hővezetési tényezőt jelöli.

4.3.2 Konstans viszkozitási tényező alkalmazása

Ebben az esetben feltesszük, hogy η_0 =konstans, továbbá, hogy a ρ sűrűség is állandó. Ekkor a mozgásegyenlet a következő alakba írható:

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \eta_0 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left|\frac{dv_z}{dr}\right|^{n-1}\frac{dv_z}{dr}\right), \tag{4.6}$$

azaz

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\eta_0\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right). \tag{4.7}$$

Az energiaegyenlet pedig a következő alakba írható:

$$0 = \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] + \eta_0\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n+1}. \tag{4.8}$$

4.1. Megjegyzés: *A (4.6) egyenlet jobboldalán megjelenő kifejezés az n-Laplace operátor a radiálisan szimmetrikus kétdimenziós esetben.*

A (4.4)-(4.6) mozgás és energiaegyenletek differenciálegyenlet-rendszeréhez a hengerszimmetriát figyelembe véve az alábbi peremfeltételeket vesszük:

$$\begin{aligned} v_z(R_0) &= 0, \;\; v_z'(0) = 0, \\ T(R_0) &= T_w, \;\; T'(0) = 0, \end{aligned}$$

amelyek izoterm folyadékáramlást jellemeznek és T_w a falhőmérsékletet jelöli. A (4.6) mozgásegyenletből integrálás után a következő összefüggés adódik:

$$\int_0^l dP = \frac{l\eta_0}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right],$$

azaz

$$P_l - P_0 = \frac{l\eta_0}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right].$$

A változók szétválasztása után integrálással a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{P_l - P_0}{l\eta_0}\frac{r^2}{2} = r\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n + C_1.$$

A peremfeltételekből $C_1 = 0$ következik. A továbbiakban

$$\alpha = \left(\frac{P_l - P_0}{2l\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

jelölést fogjuk használni. Az előző egyenletből tehát rendezés után

$$-\frac{dv_z}{dr} = \alpha r^{\frac{1}{n}} \tag{4.9}$$

adódik, melyet integrálva a sebesség z irányú komponensére a következőt írhatjuk fel:

$$-v_z(r) = \alpha r^{\frac{1}{n}+1}\frac{n}{n+1} + C_2.$$

A $v_z(R_0) = 0$ peremfeltételből meghatározzuk a C_2 állandót:

$$C_2 = -\alpha(R_0)^{\frac{1}{n}+1}\frac{n}{n+1},$$

tehát a sebesség z irányú komponense

$$v_z(r) = \alpha\frac{n}{n+1}\left(R_0^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right), \tag{4.10}$$

azaz

$$v_z(r) = \left(\frac{P_l - P_0}{2l\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}\left(R_0^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right).$$

A (4.9) összefüggéssel a (4.4) egyenletből az alábbi differenciálegyenletet kapjuk a hőmérséklet meghatározására:

$$0 = \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] + \eta_0\alpha^{n+1}r^{\frac{n+1}{n}},$$

amelyet átrendezve:

$$\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] = -\frac{\eta_0\alpha^{n+1}}{k}r^{2+\frac{1}{n}}$$

adódik. A változók szétválasztása, majd az integrálás után:

$$r\left(\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\eta_0\alpha^{n+1}}{k}\frac{n}{3n+1}r^{3+\frac{1}{n}} + C_3.$$

A peremfeltételt is figyelembe véve $C_3 = 0$. Innen a T hőmérséklet a sugár függvényében:

$$T(r) = -\frac{\eta_0\alpha^{n+1}}{k}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^2 r^{3+\frac{1}{n}} + C_4.$$

Figyelembe véve a $T(R_0) = T_w$ peremfeltételt (a hőmérséklet egyezzen meg a cső falának hőmérsékletével) kifejezzük a C_4 konstanst:

$$C_4 = T_w + \frac{\eta_0\alpha^{n+1}}{k}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^2 (R_0)^{3+\frac{1}{n}}.$$

Tehát

$$T - T_w = \frac{\eta_0 \alpha^{n+1}}{k} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 \left[(R_0)^{3+\frac{1}{n}} - r^{3+\frac{1}{n}} \right],$$

azaz

$$\frac{T - T_w}{\eta_0 \alpha^{n+1}} k = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 \left[(R_0)^{3+\frac{1}{n}} - r^{3+\frac{1}{n}} \right].$$

4.2. Megjegyzés: *A (4.6) és a (4.4) egyenleteknél a ρ sűrűségnek a hőmérséklettől való függését nem vettük figyelembe.*

4.3. Megjegyzés: *Ha a ρ sűrűség hőmérséklettől való függését figyelembe vesszük, akkor $d\rho/dT = -\kappa\rho$, ahol κ a hőtágulási tényezőt jelöli. Ekkor a (4.4) differenciálegyenlet a következő alakot ölti:*

$$0 = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + T \kappa v_z \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) + \eta_0 \left(- \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^{n+1}.$$

Az egyenlet megoldása a következő:

$$\frac{(T - T_w)}{(T_0 - T_w)^0} = \left[1 + \left(\frac{2n}{n+1} \right) T\kappa \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{3n+2}{n}} \right] - \left[\frac{(3n+1)^2}{2n(n+1)} \tau\kappa \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

ahol $(T_0 - T_w)^0$ a cső tengelyében és a falán mért hőmérséklet különbsége abban az esetben, ha $\kappa = 0$ (McKelvey [51] 78. oldal).

4.3.3 Hőmérséklettől függő viszkozitás alkalmazása

Tegyük fel, hogy $\eta_0 = \eta_0(T)$. Bár a polimerek viszkozitásának leírására

$$\eta_0 = \eta_A e^{\frac{A}{RT}}$$

Arrhenius-típusú hőmérsékletfüggő viszkozitási törvény az általános, mi az egyszerűség kedvéért a Nahme-típusú exponenciális approximációt tételezzük fel:

$$\eta_0 = \overline{\eta} e^{-\frac{A(T-T_0)}{RT_0^2}}, \tag{4.11}$$

ahol T a hőmérséklet, A az aktiválási energia (reológiai faktor), R az univerzális gázállandó, $\overline{\eta}$ a viszkozitási érték a T_0 referencia hőmérsékletnél, ahol:

$$\overline{\eta} = \eta_A e^{\frac{A}{RT_0}}.$$

Az Arrhenius-típusú törvényt ritkábban alkalmazzák a szakirodalomban, annak ellenére, hogy sokkal jobban illeszkedik a gyakorlatban vizsgált hőmérséklettartományon, mint a Nahme törvény. Ha $(T - T_0)/T_0 << 1$, akkor az Arrhenius-típusú összefüggést jól közelíti a Nahme törvény.

Ebben az esetben a (4.4) és a (4.5) mozgás- és energiaegyenletet, illetve az adott peremfeltételeket az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \overline{\eta} e^{-\frac{A(T-T_0)}{RT_0^2}} \frac{d}{dr}\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n, \tag{4.12}$$

$$\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] + \overline{\eta} e^{-\frac{A(T-T_0)}{RT_0^2}} \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n+1} = 0, \tag{4.13}$$

$$v_z(R_0) = 0 \quad , \quad v_z'(0) = 0,$$

$$T(R_0) = T_w \quad , \quad T'(0) = 0.$$

A mozgásegyenlet átrendezve

$$-\frac{dv_z}{dr} = \overline{\alpha} e^{\frac{A(T-T_0)}{nRT_0^2}} r^{\frac{1}{n}}$$

alakú, ahol $\overline{\alpha} = \left(\dfrac{P_l - P_0}{2l\overline{\eta}}\right)^{\dfrac{1}{n}}$.

4.4 Numerikus számítások a hőmérséklet eloszlásának meghatározására LDPE esetén

4.4.1 A polimerek

A gyakorlati alkalmazások miatt manapság reológiai szempontból a folyadékok széles köre a figyelem középpontjába került. A nemnewtoni folyadékok közé sorolhatók a polimer folyadékok, a kolloid- és szuszpenziós oldatok, a műanyag olvadékok.

A polietilén (PE) a legszélesebb körben használt műanyag, melynek egyik legnagyobb felhasználója a csomagolóipar (például műanyag hordtáskák). A polietilénből készült termék mechanikai tulajdonságát a molekulatömeg, a kristályosság, az elágazottság mértéke és típusa nagyban befolyásolja, emiatt a polietilént a sűrűsége és a polimer láncok elágazottsága alapján több kategóriába szokták sorolni, például:

- Nagy sűrűségű polietilén (HDPE)
- Közepes sűrűségű polietilén (MDPE)

- Kis sűrűségű polietilén (LDPE)

Az LDPE sűrűsége $0,910$ g/cm^3 és $0,940$ g/cm^3 közé esik. Az LDPE-nél a polimer láncoknak magas az elágazottsága (átlagosan a szénatomok 2 százalékánál található elágazás), emiatt az molekulák közötti kölcsönhatások gyengébbek és ez okozza, hogy az LDPE-nek kisebb a szakítószilárdsága, viszont a hajlékonysága magasabb. Az LDPE-t szabadgyökös polimerizációval állítják elő és leggyakrabban fóliának szokták használni. 1988 óta a világ több országában a bankjegyeket is ilyen alapanyagból készítik.

A különböző típusú folyadékok reológiai viselkedésének leírására sokféle modellt alkalmaznak. Az egyik széles körben használt nemnewtoni modell az Oswald-de Waele-féle hatványfüggvényt kielégítő modell (lásd 4.2. fejezet (4.1) egyenlet).

A viszkózus melegedés fontos szerepet játszik a folyadékok áramlási dinamikájában. A viszkózus melegedésnek a mennyiségi megbecsülése a viszkozimetriában nagyon bonyolult kérdés (lásd Middlemann [52]). A hatványtörvényt követő folyadékok áramlásának egzakt megoldását Martin vizsgálta hőfejlődés és hőmérsékletfüggő viszkozitás esetén (lásd [50]). Három esetben adott ilyen megoldásokat:

- kör alakú csőben nyomás hatására létrejövő áramláskor,
- nyíróáramlás esetén forgó koncentrikus hengerek között,
- nyíróáramlásra párhuzamos lapok között.

A folyadékok nem izoterm áramlása jól ismert (lásd McKelvey [51]). Az erős hőmérsékletfüggő viszkozitás azonban nem kívánt instabilitáshoz vezethet a technikai folyamatok során. Ez a jelenség matematikailag nemlineáris differenciálegyenletekkel modellezhető.

Ezen áramlások részletes analízise lehetővé teszi a megfelelő modellek értékelését és a prototipikus ipari folyamatok numerikus előrejelzését. A nemnewtoni közegek viszkozitása erősen függ a sebességgradienstől és a hőmérséklettől. Jelen esetben hatványtörvényt követő modellt használunk összenyomhatatlan homogén folyadék esetén állandó sűrűséggel úgy, hogy a viszkozitás hőmérsékletfüggőségét tételezzük fel.

A polimer folyadékok reológiai viselkedésének kvantitatív leírása azért is nagyon fontos, hogy megértsük a kapcsolatot a feldolgozás és a termékek tulajdonságai között.

4.4.2 A meghatározó egyenletek

Egy véges hosszúságú hengerben egy állandósult nemnewtoni folyadék viszkózus hőfejlődését elemezzük. A peremértékfeladat megoldása során vizsgáljuk a folyadék sebesség- és hőmérséklet eloszlását egy nemnewtoni hatványfüggvényt feltételező modellre egy tengelyszimmetrikus henger esetén. Célunk, hogy vizsgáljuk a hőmérsékletfüggő viszkozitás hatását a hőmérséklet és a sebesség eloszlására.

Tekintsük egy polimer folyadék folyását R_0 sugarú és l hosszúságú tengelyesen szimmetrikus csőben, ahol $R_0 << l$. A cső falhőmérsékletét tekintsük konstansnak és jelöljük T_w-vel. Az analízist azon feltételezés mellett végezzük el, hogy az anyag áramlása egy dimenziós. Jelöljük $v_z = v_z(r)$-rel a sebesség z irányú komponensét, amely csak r-től függ, illetve legyen

$$v_\varphi = 0,\ v_r = 0\ ,\ P = P(z),\ T = T(r),$$

ahol T a folyadék hőmérséklete, P pedig a folyadék nyomása.
A mozgásegyenlet

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right), \tag{4.14}$$

és az energiaegyenlet

$$0 = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] + \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2, \tag{4.15}$$

alakba írható, ahol η és k jelöli a polimer viszkozitási és hővezetési tényezőjét. Az Oswald-de Waele-féle hatványfügvény formulát alkalmazzuk nemnewtoni viszkozitás esetén, melyben a csúsztatófeszültség a következő formulával írható le:

$$\tau_{xy} = \eta\frac{\partial v_z}{\partial r},$$

ahol

$$\eta = \eta_0\left|-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|^{n-1}.$$

A legtöbb makromolekuláris folyadék pszeudoplasztikus, melyekre jellemzően az n értéke 0,15 és 0,6 közé esik.

Mi az n hatványfüggvény kitevőt úgy tekintjük, hogy nem függ a hőmérséklettől. Ahhoz, hogy megkapjuk a nem izotermikus probléma leírását az η_0 hőmérsékletfüggésére a (4.11) Nahme-típusú törvényt alkalmazzuk. Ebben a részben feltételezzük, hogy a k hővezetési tényező és a ρ nyomás nem függ a hőmérséklettől és a folytonossági egyenlet automatikusan teljesül.

Tekintsük a csúszásmentes peremfeltételt és a sebesség tengelyszimmetria miatti tulajdonságait és a (4.12), (4.13) egyenleteket vegyük a

$$v_z(R_0) = 0,\ T(R_0) = T_w,\ v_z'(0) = 0,\ T'(0) = 0 \tag{4.16}$$

peremfeltételekkel.

Integrálva a (4.12) egyenletet, valamint figyelembe véve, hogy $0 < z < l$, ahol l a kísérletben szereplő kapilláris cső hossza, a következő összefüggés adódik:

$$-\left(\frac{dv_z}{dr}\right) = (\alpha R_0)^{\frac{1}{n}}\, e^{\theta}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.17}$$

Bevezetjük a következő dimenziómentes mennyiségeket:

$$\theta = \frac{A}{nR}\frac{T - T_0}{T_0^2},\ \ \xi = \frac{r}{R_0}$$

és felhasználjuk, hogy $v_z(r) = v(\xi)$. A (4.17) egyenletből a

$$-\left(\frac{dv}{d\xi}\right) = (\widetilde{\alpha} R_0)^{\frac{1}{n}}\, R_0 e^{\theta}(\xi)^{\frac{1}{n}}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$\widetilde{\alpha} = \left(\frac{P_l - P_0}{2l\overline{\eta}} R_0\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Tehát a (4.13) energiaegyenlet a dimenziómentes mennyiségekkel

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \overline{\gamma} e^{\theta}\xi^{\frac{n+1}{n}} = 0 \tag{4.18}$$

alakba írható, ahol

$$\overline{\gamma} = \frac{AR_0^2}{knT_0^2R}\overline{\eta}^{\frac{-1}{n}}\left(\frac{P_l - P_0}{2l} R_0\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

A megfelelő peremfeltételek pedig

$$\theta'(0) = 0,\ \ \theta(1) = \frac{A}{nR}\frac{T_w - T_0}{T_0^2}$$

alakúak.

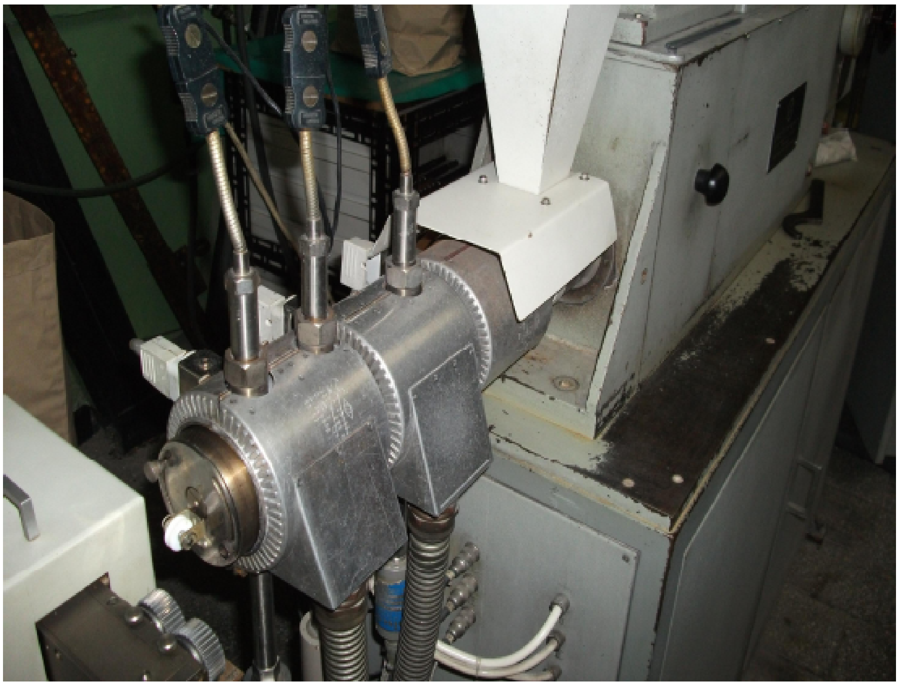
4.4.3 Az LDPE reológiai jellemzése

Jelen esetben egy kör keresztmetszetű, egyenes csőben lévő, kialakult, hengerszimmetrikus lamináris áramlást mutatunk be. (Csövekben azt az áramlást nevezzük *kialakult áramlásnak*, amelyben a sebességmegoszlás a cső hossza mentén nem változik: $dv_z/dz = 0$. Ebben a fejezetben a [RE15] dolgozatban vizsgált LDPE-re vonatkozó eredményeket ismertetjük.

A BRALEN RB 03-23 általános LDPE típust vizsgáltunk, amely magas feszültségkorróziós ellenállással és nagyon jó mechanikai tulajdonságokkal rendelkezik. Ez a típus nem tartalmaz adalékot. Általában nagy igénybevételű zsákok, 0,07-0,25 mm vastagságú zsugorfóliák gyártására alkalmas. Ezenkívül különböző fúvott tartályok készítésére, csövek, lemezek és profilok extrudálására, valamint fröccsöntésre, játékok gyártására, élelmiszerek és gyógyszerek csomagolására is felhasználják.

Ebben a fejezetben a BRALEN RB 03-23 típusú alacsony sűrűségű alapanyag reológiai paramétereinek kísérleti meghatározását mutatjuk be. A méréseket a BorsodChem Zrt. kazincbarcikai laboratóriumában végeztük el. A vizsgálatok során Göttfert-féle 20-as extrúdert alkalmaztunk, 1:4 arányú összenyomási aránnyal hosszú kompressziós zónával. A csiga átmérője 20 mm. Hengeres, 2 mm átmérőjű és 30 mm hosszú acél kapilláris düznit használtunk. A bemeneti szög 90°, a düzni pedig rögzítve van az extrúderben. Az olvadási hőmérsékletet és az olvadási nyomást három helyen mértük a csőben. Annak érdekében, hogy minimalizáljuk a mérési hibákat a hőmérsékletszenzorok izolálva vannak a csőtől egy alacsony hővezetésű kerámiával. Csak a 20D-nél elhelyezett szenzorok értékeit használtuk fel. A G tömegáramot az extrudált rudakból számítottuk (percenkénti vágatokból). A 4.2. ábrán az általunk használt düznit láthatjuk, míg a 4.3. ábra a kísérletekben használt Göttfert-féle extrúdert mutatja.

4.2. ábra



4.3. ábra

Az extrúziós méréseket három-féle acél hőmérsékleten végeztük el a düzni zónájában 160°C, 170°C, illetve 180°C esetén. A csiga fordulatszámát öt különböző értékre állítottuk be:

$$\overline{n} = 20,\quad 40,\quad 60,\quad 80,\quad 100,$$

melyeket mind a három hőmérséklet esetén alkalmaztunk.

A mért adatokat a 4.1. táblázat tartalmazza, ahol G a térfogatáramot jelöli:

$\overline{n}$ $[rpm]$	G $[g/min]$	P_3 $[bar]$	ϑ	P_3 $[bar]$	ϑ	P_3 $[bar]$	ϑ
		$160°C$	$160°C$	$170°C$	$170°C$	$180°C$	$180°C$
20	6	108	$162,2$	100	$173,4$	93	$183,6$
40	12	130	$162,7$				
40	$12,2$			120	$173,7$		
40	$12,5$					115	$184,5$
60	19	143	$163,5$	135	$174,3$	130	$184,8$
80	$24,5$	155	$164,2$	145	$174,5$	135	$185,1$
100	31	162	$164,4$				
100	$31,5$			155	$175,3$	145	$185,3$

4.1. táblázat

A mért adatokból a deformációsebességet a Rabinowitsch formulával számítjuk:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{3\overline{n}+1}{\overline{n}}\right)\frac{G}{\pi r^3 \rho}.$$

A csúsztatófeszültség:

$$\tau = \frac{r\Delta p}{2l}.$$

A dinamikus viszkozitás ezek ismeretében

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}.$$

A mért adatokkal kapott számításokat a $\dot{\gamma}$ [1/s], τ [Pa] és η [Pa s] esetén mindhárom hőmérsékletre a 4.2.-4.4. táblázatok tartalmazzák.

$\dot{\gamma}$	τ (160°C)	η (160°C)	ϑ (160°C)	$1000/T$
$236,862$	182304	$769,7$	$162,2$	$2,29695$
$473,724$	219440	$463,2$	$162,2$	$2,29431$
$750,063$	241384	$321,8$	$163,5$	$2,29011$
$967,187$	261640	$270,5$	$164,2$	$2,28645$
$1223,79$	273456	$223,45$	$164,6$	$2,28436$

4.2. táblázat: 160°C esetén mért adatok

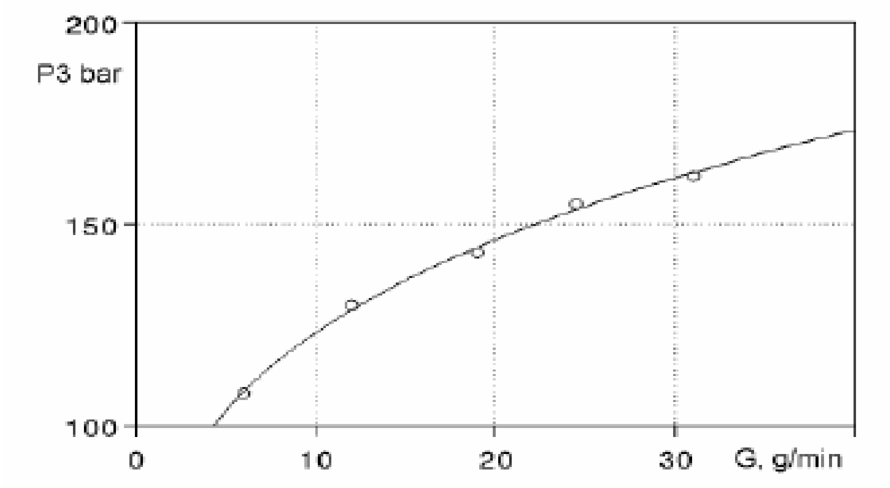
$\dot{\gamma}$	τ (170°C)	η (170°C)	ϑ (170°C)	$1000/T$
$236,862$	168800	$712,7$	$173,3$	$2,23934$
$481,619$	202560	$420,6$	$173,7$	$2,23784$
$750,063$	227880	$303,8$	$174,3$	$2,23484$
$967,187$	244760	$253,1$	$174,5$	$2,23384$
$1243,53$	261640	$210,4$	$175,3$	$2,22985$

4.3. táblázat: 170°C esetén mért adatok

$\dot{\gamma}$	τ (180°C)	η (180°C)	ϑ (180°C)	$1000/T$
$236,862$	156984	$662,8$	$183,6$	$2,18933$
$493,463$	194120	$393,4$	$184,5$	$2,18504$
$750,063$	219440	$292,6$	$184,8$	$2,18360$
$967,187$	227880	$235,6$	$185,1$	$2,18217$
$1243,53$	244760	$196,8$	$185,3$	$2,18122$

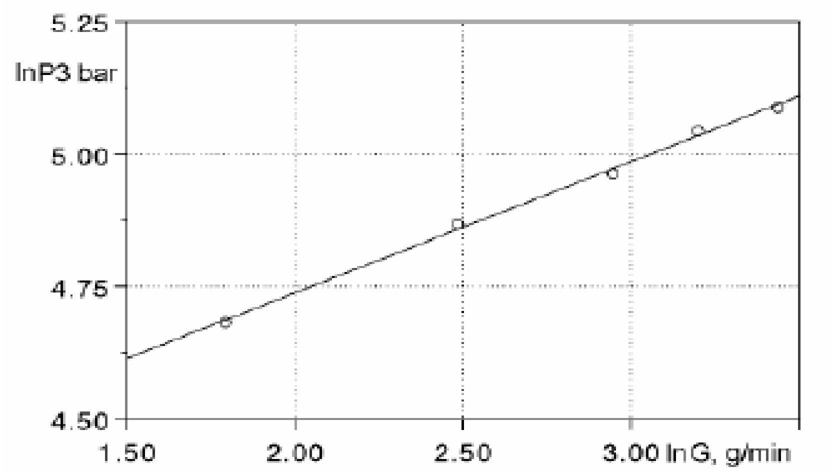
4.4. táblázat: 180°C esetén mért adatok

A 4.4. ábra a nyomást a térfogatáram függvényében mutatja 160°C esetén.



4.4. ábra

A nyomás logaritmusa és a térfogatáram logaritmusa közti összefüggést ábrázolva egy egyenessel jól közelíthető görbét kapunk mindhárom mért hőmérséklet esetén. A 4.5. ábra ezt az egyenest mutatja 160°C-on mért adatok esetén.



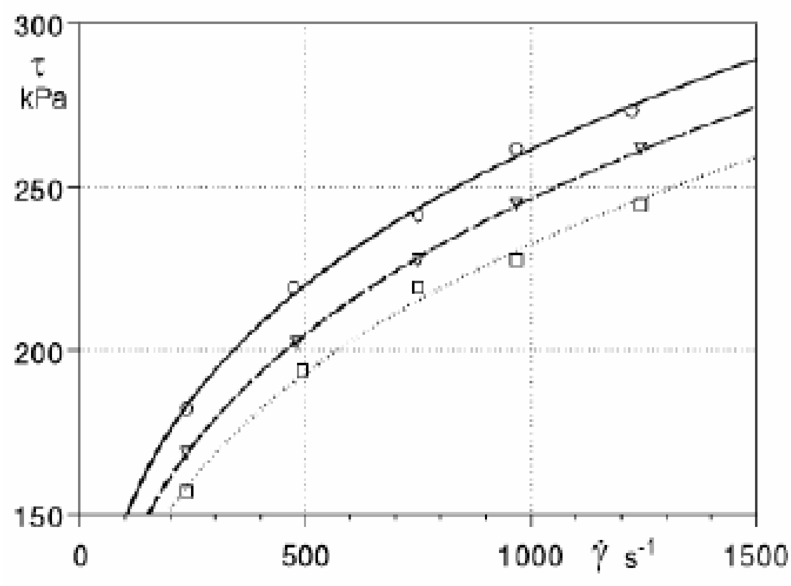
4.5. ábra

Ezen egyenes meredeksége adja a hatványtörvényben lévő n kitevőt, ami a három hőmérséklet esetén:

- $160°C$ esetén $n = 0,24776$
- $170°C$ esetén $n = 0,26555$
- $180°C$ esetén $n = 0,26694$.

Ezen adatokból látható tehát, hogy az n kitevő is hőmérsékletfüggő. Az egyszerűség kedvéért számításainkban az $n = 0,26$ konstans átlagértékkel számoltunk.

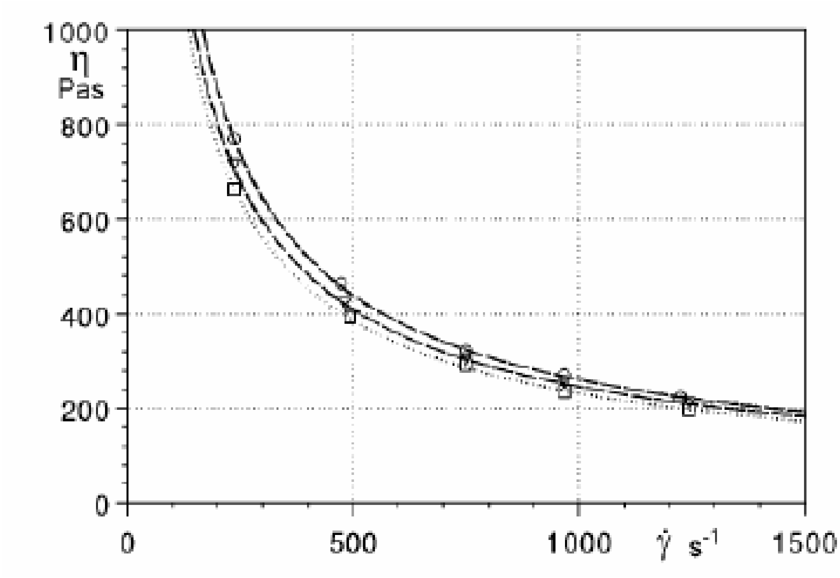
A 4.6. ábra a csúsztatófeszültség és a deformációsebesség közti összefüggést ábrázolja 160°C esetén folytonos, 170°C esetén szaggatott, 180°C esetén pöttyözött vonallal.



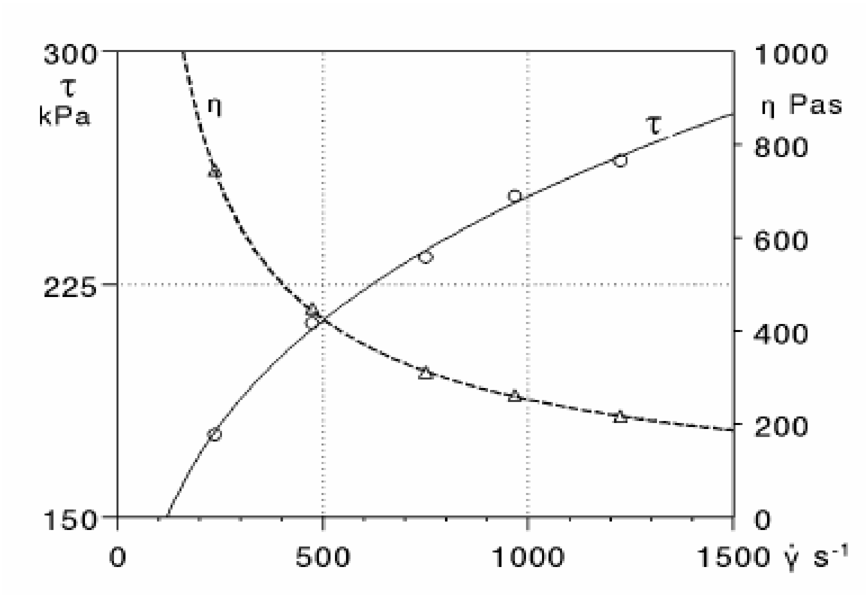
4.6. ábra

A viszkozitás és a deformációsebesség közti összefüggést a 4.7. ábrán láthatjuk a három különböző hőmérséklet esetén (160°C-folytonos, 170°C-szaggatott, 180°C-pöttyözött vonal).

A nyírófeszültség és a viszkozitás deformációsebességhez való viszonyát a 4.8. ábra mutatja 160°C esetén.



4.7. ábra



4.8. ábra

A deformációsebesség és a viszkozitás viszonya a mérések alapján számított adatokból:

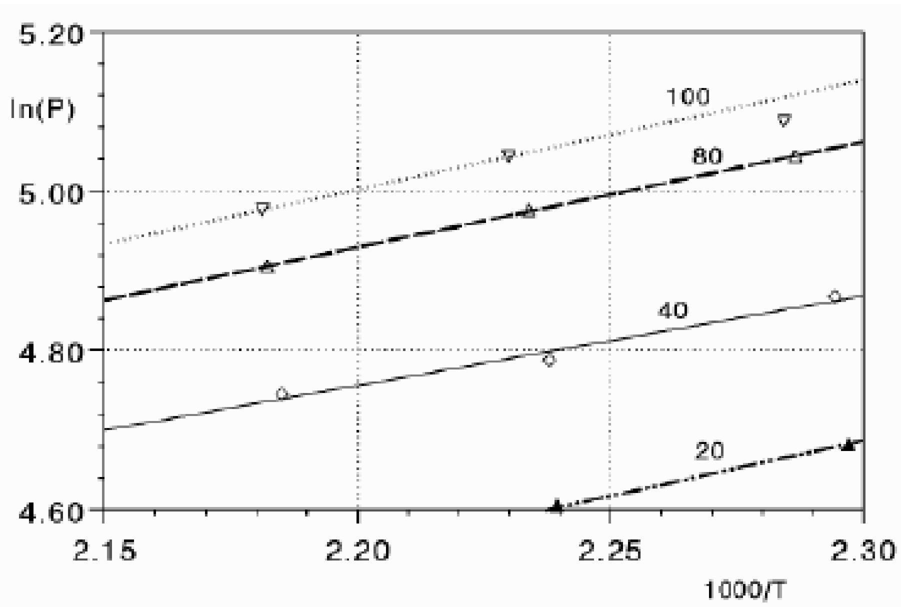
- $160°C$ esetén $\eta = 42277\dot{\gamma}^{-0,7524}$
- $170°C$ esetén $\eta = 39628\dot{\gamma}^{-0,7354}$
- $180°C$ esetén $\eta = 36785\dot{\gamma}^{-0,7331}$.

A polietilén sűrűségét $\rho = 920$ g/cm^3-nek mértük, ami jól megegyezik a szlovák Slovnaft gyártócég által megadott $\rho = 919$ g/cm^3 adattal. A c_p fajhőt DSC méréssel határoztuk meg 160°C-on:

$$c_p = 2.28 \text{ kJ/kg K} ,$$

ami nem tér el jelentősen a szakirodalomban megadott $c_p = 2,3$ kJ/(kg K)-tól (lásd Rodriguez [57]).

A 4.9. ábrában a mért nyomást ábrázoltuk a hőmérséklet reciprokának függvényeként különböző csiga fordulatszámok esetén. Az ábrákban a düzni előtt mért hőmérsékleteket alkalmaztuk. Mivel a kifolyó anyagáram majdnem független a hőmérséklettől és csak a csiga fordulatszámától függ, ezért a nyomás segítségével kiszámítható az A aktiválási energia.



4.9. ábra A mért nyomás ábrázolása a hőmérséklet reciprokának függvényeként

A viszkozitás hőmérséklettől való függésének az Arrhenius-törvény szerinti közelítését mutatja a 4.9. ábra, ahol az egyenessel való közelítések a következőek:

- $\bar{n} = 20 \;\ln P_3 = 1,4946 + 1,3880\frac{1}{T}$ [kJ/mol]
- $\bar{n} = 40 \;\ln P_3 = 2,2800 + 1,2500\frac{1}{T}$ [kJ/mol]
- $\bar{n} = 80 \;\ln P_3 = 2,0157 + 1,3246\frac{1}{T}$ [kJ/mol]
- $\bar{n} = 100 \;\ln P_3 = 1,9860 + 1,3710\frac{1}{T}$ [kJ/mol].

Az A aktiválási energiát a mért adatok alapján $A = 11,08$ KJ/mol átlagértéknek fogjuk számításainkban venni.

4.4.4 Numerikus számítások

Ebben a részben a 4.4.2. fejezetben levezetett (4.18) differenciálegyenletre alkalmazzuk a mérési eredményeinket a kapillárisban a hőmérséklet eloszlás meghatározására.

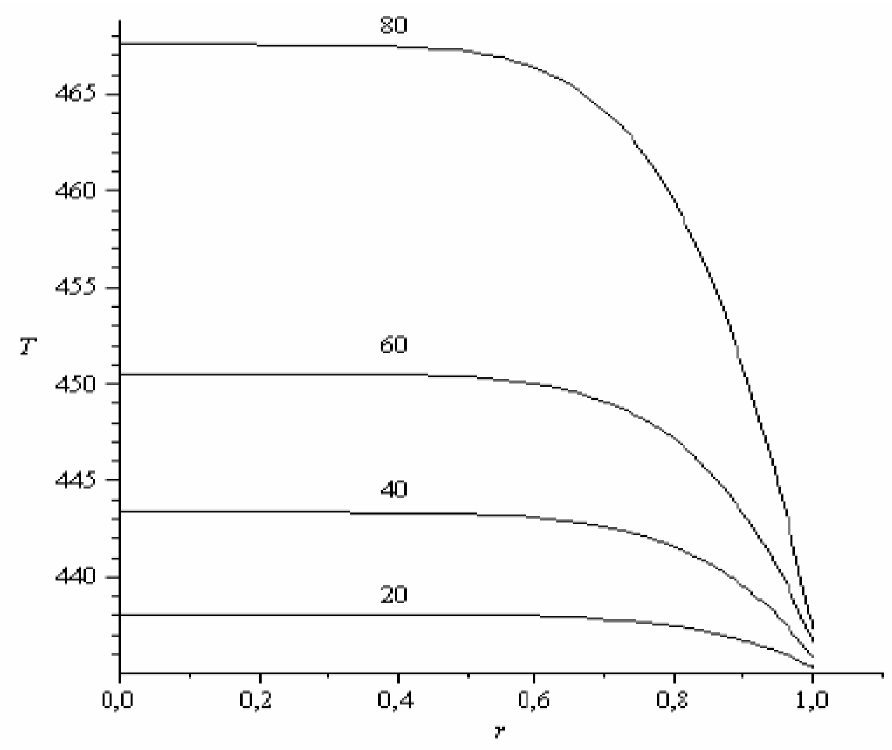
A (4.18) megoldását megadhatjuk a dimenziómentes θ hőmérsékletre az

$$\begin{aligned} \theta(1) &= \tfrac{A}{nR}\tfrac{T_w - T_0}{T_0^2}, \\ \theta'(0) &= 0, \end{aligned}$$

peremfeltételek figyelembevételével. Az előző részben említett LDPE esetén mért reológiai adatokhoz hozzávesszük a kísérletben szereplő kapilláris adatait:

$$\begin{aligned} l &= 30 \text{ mm}, \\ R_0 &= 1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

A numerikus számítások alapján a 160°C esetén nyert hőmérséklet-eloszlást különböző csigafordulatszámon a csiga tengelyére merőlegesen a 4.10. ábrán mutatjuk be:



4.10. ábra

A peremértékfeladat megoldására MAPLE bvp 4 programcsomag eljárását használtunk. A kapilláris tengelyében számított hőmérséklet növekményt a 4.5. táblázat tartalmazza a három különböző acél hőmérséklet mellett különböző csiga fordulatszámok esetén:

$\overline{n}$ $[rpm]$	ΔT $(160°C)$ $[K]$	ΔT $(170°C)$ $[K]$	ΔT $(180°C)$ $[K]$
20	$2,719$	$2,382$	$2,223$
40	$7,492$	$6,341$	$6,976$
60	$13,852$	$13,248$	$15,508$
80	$33,226$	$24,496$	$21,466$

4.5. táblázat

A számított értékek még a vizsgált néhány száz s^{-1}-es nyírófeszültség esetén is jelentősek. A hőérzékeny anyagok esetén az ilyen viszkozitásból származó hőmérsékletnövekmény súlyos gyártási problémákat okozhat.

5 Egy nemlineáris reakció-diffúzió probléma

5.1 Bevezetés

Számos fizikai, kémiai, biológiai folyamatban diffúzió megy végbe, illetve kémiai vagy biológiai reakciók reprezentálásának pillanatnyi kölcsönhatásainál is megtalálható. Egy reakció-diffúzió problémának a modellje az egyensúlyi állapotban az $\Omega \subset \mathbf{R^n}$ halmazon jellemezhető a

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \tag{5.1}$$

egyenlettel, ahol $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p > 1$ az u p-Laplace operátora, f pedig u egy növekvő függvénye, amelyre tételezzük fel, hogy

$$f(u) = \begin{cases} u^\gamma + u^\delta & , \quad u \geqq 0, \\ 0 & , \quad u < 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

ahol γ és δ valós paraméterértékek. (Megjegyezzük, hogy az itt használt görög betűk, p és n értékek az előző fejezetekben lévőktől különböznek.) Ez az egyenlet az általános reakció-diffúzió elméletében és a nemnewtoni folyadékok tárgyalásában is megjelenik például Herrero és Vazquez dolgozatában [32]. Tekintsük az (5.1) egyenlet pozitív radiális $u = u(|x|) \in B_R$ megoldását, ahol

$$B_R = \{x \in \mathbf{R^n} | \ \ |x| < R\}$$

és $1 < p < n$.

- $p = 2$ esetben az (5.1) radiális probléma megoldását, mint egy szemilineáris problémát szuperlineáris és szuperkritikus kitevővel Lin és Ni [44] cikkében találjuk meg,
- $p \neq 2$ esetben az (5.1) egyenlet megoldásának létezését Bognár és Drábek a [12] cikkében illetve Yang és Xu a [69] dolgozatban már megvizsgálták,
- $p > 2$ esetben az (5.1) egyenlet az úgynevezett lassú diffúziós folyamatokat írja le,
- $1 < p < 2$ eset az (5.1) egyenlet gyors diffúziós esetének felel meg.

Az (5.1) egyenlet megjelenik az összenyomható folyadékok áramlásának leírásánál egy homogén, merev, izotrop porózus anyagon keresztül. Az (5.1) egyenlet az egyensúlyi állapotot írja le, amely az általános folytonossági egyenletből származtatható.

Ehhez hasonló reakciós differenciálegyenletek számos helyen megjelennek, mint például a Fisher egyenletben, amely eredetileg a biológiai populációk sűrűségi változásának a leírására szolgál. Sokan úgy gondolják, hogy a reakció-diffúzió egyenletek alkalmasak arra, hogy leírják a morphogenezis folyamatát, illetve az állatbőrök mintázatának (például: zebrák csíkjainak mintázata) leírását a biológiában.

5.2 A matematikai modell

Mi ebben a fejezetben a [RE13] dolgozat alapján az (5.1) egyenletet kielégítő radiális megoldásokat, azaz

$$\begin{cases} r^{1-n}\left(r^{n-1}\,|u_r'|^{p-2}\,u_r'\right)' + f(u) = 0 \quad , & (0,\infty)\,, \\ u_r'(0) = 0 \quad , & u(0) = \alpha \geq 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

kezdetiérték probléma megoldásait vizsgáljuk, ahol $r = |x|$. Az (5.3) átírható az

$$\begin{cases} (p-1)\,|u_r'|^{p-2}\,u_{rr}'' + \frac{n-1}{r}\,|u_r'|^{p-2}\,u_r' + f(u) = 0 \quad , & (0,\infty)\,, \\ u_r'(0) = 0 \quad , & u(0) = \alpha \geq 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

alakba. Az (5.1) probléma pozitív $u = u(r)$ radiális megoldása kielégíti az (5.3) (illetve az (5.4)) kezdetiérték problémát és $\alpha \geq 0$, $u(r) > 0$ teljesül bármely $r \in (0,\infty)$ esetén, amikor $\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$.

Ebben a fejezetben ismertetjük a [RE13] dolgozatban lévő eredményeinket, ahol az volt a célunk, hogy megadjuk az (5.3) (ill. az (5.4)) kezdetiérték feladat lokális megoldását speciális paraméterértékek esetén. Megvizsgáljuk az (5.4) probléma lokális megoldásainak létezését és megadunk egy módszert a megoldás hatványsor alakjának felírására adott p, n, α, γ és δ esetén. Összehasonlítjuk az egzakt és hatványsor alakú megoldásokat és megvizsgáljuk a hibát bizonyos speciális paraméterértékek esetén.

5.3 Pozitív megoldás megadása

A pozitív radiálisan szimmetrikus megoldása az (5.1) egyenletnek egy olyan $u = u(r)$ függvény, amely megoldja az (5.4) problémát $\alpha > 0$, $u(r) > 0$ bármely $r \in (0,\infty)$ esetén és $\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$ is teljesül. Feltesszük, hogy

$$p - 1 < \gamma < \widehat{p} - 1$$

és

$$\delta > \widehat{p} - 1,$$

ahol

$$\widehat{p} = \frac{np}{n-p},$$

továbbá a γ és δ kitevők kielégítik

$$\gamma = \frac{\beta+1}{\beta}(p-1),\ \delta = \gamma + \frac{1}{\beta} \tag{5.5}$$

egyenleteket, ahol

$$\beta \in \left(\frac{(n-p)(p-1)}{p^2}, \frac{n-p}{p} \right), \tag{5.6}$$

azaz $\gamma = (\delta+1)/p'$ és $p' = p/(p-1)$.

5.1. Tétel: *Legyenek p, p', n, β, γ, δ és f a fenti összefüggésekkel adottak és*

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\left(\frac{n}{(\beta+1)p} - 1\right)^{\beta}}, \\ b &= \frac{(n-(\beta+1)p)^{p'}}{(\beta+1)\ p} \left(\frac{\beta\ p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Ekkor az (5.1) differenciálegyenletnek

$$u(r) = a\left(\frac{b}{b + r^{p'}}\right)^{\beta}$$

egy megoldása.

(A tétel bizonyítását 2005-ben Bognár és Drábek a [12] cikkükben adták meg.)

Könnyen kiszámítható, hogy ilyen alakú $u(r)$ megoldásra

$$r^{1-n}\left(r^{n-1}\left|u'(r)\right|^{p-2}u'(r)\right)' = -\frac{\left(\beta p' a b^{\beta}\right)^{p-1}}{\left(b + r^{p'}\right)^{(\beta+1)(p-1)+1}}\left(n(b + r^{p'}) - (\beta+1)pr^{p'}\right)$$

teljesül és ezt az (5.3)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\left\{ \begin{array}{c} a^{\frac{(\beta+1)(p-1)}{\beta}} b^{(\beta+1)(p-1)} \left(1 + a^{\frac{1}{\beta}}\right) = \left(\beta p' a b^{\beta}\right)^{p-1} n, \\ (\beta+1)p\left(\beta p' a b^{\beta}\right)^{p-1} = \left(\beta p' a b^{\beta}\right)^{p-1} n - a^{\frac{(\beta+1)(p-1)}{\beta}} b^{(\beta+1)(p-1)}. \end{array} \right. \tag{5.7}$$

Az a és b paraméterekre az (5.7)-ből ugyanazokat az értékeket kapjuk, mint az 5.1. tételben adottak. Mindkét konstans $p = 2$ esetben kielégíti a Lin és Ni [44] cikkében lévő összefüggéseket és ekkor $\delta = (\beta+2)/\beta$ is teljesül.

5.4 Lokális megoldás létezése

Tekintsük az (5.4) problémát, mint egy speciális Briot-Bouquet differenciálegyenlet-rendszert (lásd 2.5. fejezet).

5.2. Megjegyzés: *Ha $n > 1$, akkor az (5.4) differenciálegyenletnek szingularitása van az $r = 0$ helyen.*

5.3. Tétel: *Bármely p, q, γ, δ, n fentebb megadott értékek esetén az (5.4) kezdetiérték problémának $u(0) = \alpha$, u'(0)=0 kezdeti feltételek mellett létezik egyértelmű megoldása $u(r) = Q\left(r^{\frac{p}{p-1}}\right)$ alakban a $(0, A)$ intervallumon, ahol A egy kis pozitív valós szám és Q a*

$$Q'' = \frac{-1}{p\ (1+1/p)^{p+1}} r^{-\frac{p+1}{p}} \frac{Q^\gamma + Q^\delta}{|Q'|^{p-1}} - \frac{n}{p\ \alpha} r^{-(1+1/p)} Q'$$

differenciálegyenlet egy holomorf megoldása a zérus közelében, amely kielégíti a

$$Q(0) = \alpha, \quad Q'(0) = \frac{1-p}{p}\left(\frac{\alpha^\gamma + \alpha^\delta}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

kezdeti feltételeket.

A tétel bizonyítása megtalálható a [RE3] cikkben.

5.4. Definíció: *Legyen adva az $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ nyílt halmaz és az $f : \Omega \to \mathbf{C}$ leképezés. Az f leképezést akkor nevezzük holomorf függvénynek, ha minden $z_0 \in \Omega$ pontban létezik a következő határérték:*

$$\lim_{z \to z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

5.5. Megjegyzés: *A Briot- Bouquet tétel biztosítja a tételben szereplő*

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi z_1' = u_1\left(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)\right), \\ \xi z_2' = u_2\left(\xi, z_1(\xi), z_2(\xi)\right), \end{array} \right. \tag{5.8}$$

egyenletrendszer

$$z_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \ \text{ és } z_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k$$

hatványsor alakú megoldásainak létezését és annak konvergenciáját.

5.6. Következmény: *A 2.1. tételből következik, hogy az (5.4) kezdetiérték probléma hatványsor alakú $u(r)$ megoldása a nulla közelében*

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \; r^{\frac{p}{p-1}k}$$

alakú, mely kielégíti az

$$u(0) = \alpha, \; u'(0) = 0$$

kezdeti feltételeket.

5.5 Lokális megoldás meghatározása

Ebben a részben előállítjuk az (5.4) kezdetiérték feladat hatványsor alakú megoldását az

$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0 \tag{5.9}$$

kezdeti feltételek esetén. A megoldást az

$$u(r) = g_0 + g_1 \; r^{\frac{p}{p-1}} + g_2 \; r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots , \tag{5.10}$$

alakban keressük $r > 0$ esetén a $g_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ együtthatókkal. Az 5.3. tételből

$$g_0 = \alpha \text{ és } g_1 = \frac{1-p}{p} \left(\frac{\alpha^{\gamma} + \alpha^{\delta}}{n} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

összefüggések adódnak.
Tegyük fel, hogy α, γ, δ, p és n paraméterekkel $u(r) > 0$ és $u'(r) < 0$ a zérus közelében. Mivel

$$u'(r) = r^{\frac{1}{p-1}} \left[g_1 \frac{p}{p-1} + g_2 \frac{2p}{p-1} \; r^{\frac{p}{p-1}} + \ldots \right]$$

és $f(s) = s|s|^{p-2}$ páratlan függvény $s \in \mathbf{R}$ esetén, ezért

$$\begin{aligned} |u'(r)|^{p-2} \, u'(r) &= -r \left[-g_1 \tfrac{p}{p-1} - g_2 \tfrac{2p}{p-1} \; r^{\frac{p}{p-1}} - \cdots \right]^{p-1} \\ &= -r \left[P_0 + P_1 \; r^{\frac{p}{p-1}} + P_2 \; r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots \right], \end{aligned} \tag{5.11}$$

továbbá

$$\begin{aligned} & r^{1-n} \left(r^{n-1} \, |u'(r)|^{p-2} \, u'(r) \right)' \\ = \;\; & P_0 n + P_1 \left(n + \tfrac{p}{p-1} \right) \; r^{\frac{p}{p-1}} + P_k \left(n + \tfrac{kp}{p-1} \right) \; r^{k\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \ldots , \end{aligned}$$

ahol P_k együtthatókat g_k-ból ($k = 0, 1, 2, \cdots$) fejezzük majd ki. Ezek után tekintsük

$$\begin{aligned} u^{\gamma}(t) &= \left[g_0 + g_1\, r^{\frac{p}{p-1}} + g_2\, r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots\right]^{\gamma} \\ &= G_0 + G_1\, r^{\frac{p}{p-1}} + G_2\, r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} u^{\delta}(t) &= \left[g_0 + g_1\, r^{\frac{p}{p-1}} + g_2\, r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots\right]^{\delta} \\ &= D_0 + D_1\, r^{\frac{p}{p-1}} + D_2\, r^{2\left(\frac{p}{p-1}\right)} + \cdots \end{aligned}$$

kifejezéseket, ahol G_k és D_k ($k = 1, 2, 3, \cdots$) együtthatókat is g_k-ból származtatjuk.

Visszahelyettesítve ezen összefüggéseket az (5.4)-beli egyenletbe összehasonlítjuk r azonos hatványainak együtthatóit, melyből

$$P_k\left(n + \frac{kp}{p-1}\right) + G_k + D_k = 0, \quad k \geq 0. \tag{5.12}$$

Alkalmazzuk a Miller formulát (Henrici [31]) a P_k, G_k és D_k ($k = 0, 1, 2, \cdots$) együtthatók meghatározására a

$$\begin{aligned} G_k &= \tfrac{1}{k\alpha}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(k-j)\,\gamma - j\right] G_j g_{k-j}, \\ D_k &= \tfrac{1}{k\alpha}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(k-j)\,\delta - j\right] D_j g_{k-j}, \\ P_k &= \sum_{j=0}^{k-1}\left[(k-j)\,(p-1) - j\right] P_j g_{k+1-j}\tfrac{(k+1-j)}{g_1 k} \end{aligned}$$

rekurzív formulákat kapjuk, ahol

$$G_0 = g_0^{\gamma}, \quad D_0 = g_0^{\delta}, \quad P_0 = \left(g_1\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}.$$

Így az (5.12) összefüggésből meg tudjuk határozni a g_k együtthatókat $k > 0$ esetén.

Az előző elméleti eredményeket a következő példákban szemléltetjük rögzített paraméterértékek esetén.

1. Példa: Tekintsük az (5.4) probléma megoldását

$$p = 2, \quad n = 5, \quad \alpha = 2,3233, \quad \gamma = 1,8, \quad \delta = 3$$

paraméterekkel. Feladatunk, hogy az

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \, r^{2k}$$

megoldásfüggvényben megadjuk a g_k együtthatókat a fent ismertetett összefüggések segítségével. MAPLE-ben megírt programmal határoztuk meg az (5.12) szerint a g_k együtthatókat. A kapott eredmény:

$$g_0 = 2,3233, \quad g_1 = -1,7101, \quad g_2 = 1,2047, \quad g_3 = -0,8505, \quad g_4 = 0,6013, \cdots .$$

Tehát a

$$\begin{cases} u''_{rr} + \frac{4}{r} u'_r + u^{1,8} + u^3 = 0 \quad , \qquad (0, \infty) \, , \\ \qquad\qquad u'_r(0) = 0 \quad , \qquad u(0) = 2,3233, \end{cases}$$

kezdetiérték feladat hatványsor alakú közelítő megoldása:

$$u(r) = 2,3233 - 1,7101 r^2 + 1,2047 r^4 - 0,8505 r^6 + 0,6013 r^8 - \cdots$$

alakban adható meg.

A további példákban n, γ, δ értékeit nem változtatjuk csak p érték változásának hatását vizsgáljuk. Kiszámítjuk a hatványsor alakú megoldást különböző p értékek esetén ($p = 1,8, \;\; 2, \;\; 2,2, \;\; 3$). Az (5.4) kezdetiérték feladat megoldásának értékét a nullában jelöljük

$$g_0 = \left(\frac{n}{(\beta+1)p} - 1 \right)^{-\beta} \text{-lal.}$$

Ez az érték megegyezik az (5.1.) tételben szereplő a paraméterrel.

2. Példa: Tekintsük az (5.4) problémát

$$p = 1,8, \quad n = 5, \quad \alpha = 1,7380, \quad \gamma = 1,8, \quad \delta = 3$$

paraméterekkel. Tehát a

$$\begin{cases} 0,8 |u'_r|^{-0,2} u''_{rr} + \frac{4}{r} |u'_r|^{-0,2} u'_r + u^{1,8} + u^3 = 0 \quad , \qquad (0, \infty) \, , \\ \qquad\qquad u'_r(0) = 0 \quad , \qquad u(0) = 1,7380, \end{cases}$$

kezdetiérték feladat hatványsor alakú közelítő megoldása:

$$u(r) = 1,7380 - 0,794r^{1,44} + 0,4053r^{2,88} - 0,2137r^{4,32} + 0,1145r^{5,76} - 0,0619r^{7,2} + \cdots$$

alakban adható meg.

3. Példa: Kiszámítjuk az (5.4) kezdetiérték feladat hatványsor alakú megoldásfüggvényében lévő együtthatókat a

$$p = 2,2, \quad n = 5, \quad \alpha = 3,2884, \quad \gamma = 1,8, \quad \delta = 3$$

paraméterértékek esetén. A

$$\begin{cases} 1,2|u'_r|^{0,2}u''_{rr} + \frac{4}{r}|u'_r|^{0,2}u'_r + u^{1,8} + u^3 = 0 \quad , \qquad (0,\infty)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u'_r(0) = 0 \quad , \quad u(0) = 3,2884, \end{cases}$$

kezdetiérték feladat hatványsor alakú MAPLE-ben írt program alkalmazásával kapott eredményünk:

$$u(r) = 3,2884 - 3,3458r^{2,64} + 2,8728r^{5,28} - 2,3882r^{7,92} + 1,9539r^{10,56} - \cdots .$$

Ha feltesszük, hogy

$$u(r) > 0 \text{ és } u'(r) > 0$$

a nulla környezetében, akkor az (5.11)

$$|u'(r)|^{p-2}\, u'(r) = [u'(r)]^{p-1}$$

alakba írható, azaz

$$\begin{aligned} [u'(r)]^{p-1} &= r\left[g_1\tfrac{p}{p-1} + g_2\tfrac{2p}{p-1}r^{\frac{p}{p-1}} + \cdots\right]^{p-1} \\ &= r\left[P_0 + P_1 r^{\frac{p}{p-1}} + P_2 r^{2\frac{p}{p-1}} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Ebben az esetben a P_k, G_k és D_k közti összefüggés a következő:

$$P_k\left(n + \frac{kp}{p-1}\right) + G_k + D_k = 0$$

$k \geq 0$ esetén, továbbá

$$G_0 = g_0^{\gamma}, \quad D_0 = g_0^{\delta}, \quad P_0 = \left(g_1\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}.$$

4. Példa: Tekintsük az (5.4) problémát

$$p = 3, \quad n = 4, \quad \alpha = 1,21, \quad \gamma = 9,2, \quad \delta = 12,8$$

paraméterekkel.

A feladat az, hogy a

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \, r^{\frac{3}{2}k}$$

megoldásfüggvényben számítsuk ki a g_k együtthatókat a

$$\begin{cases} 2|u'_r|u''_{rr} + \frac{3}{r}|u'_r|u'_r + f(u) = 0 \quad , \qquad (0,\infty)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u'_r(0) = 0 \quad , \qquad u(0) = 1,21, \end{cases}$$

kezdetiérték feladat esetén.

A számítások elvégzése után egy a MAPLE-ben megírt programmal az

$$u(r) = 2,3892 - 89,736r^{1,5} - 861,325r^3 + 73284,78r^{4,5} - \cdots$$

megoldás adódik.

5.6 Az egzakt és a lokális megoldások összehasonlítása

Az előző négy példában megadtuk az (5.4) kezdetiérték feladat lokális megoldásait a nulla közelében. A p, n, γ és δ értékeit úgy választottuk meg, hogy kielégítsék az (5.5) feltételt. Így az említett problémának ezekre a speciális értékekre létezik zárt alakban előállítható megoldása.

Tekintsük az (5.4) problémát különböző p ($p = 1,8,\ 2,\ 2,2$) értékek esetén a fenn említett n, γ és δ paraméterértékekre ($\beta = 5/6$ fix paraméter mindhárom esetben). Az 5.1. tételt felhasználva meghatározzuk a pozitív megoldásokat mindhárom p érték esetén.

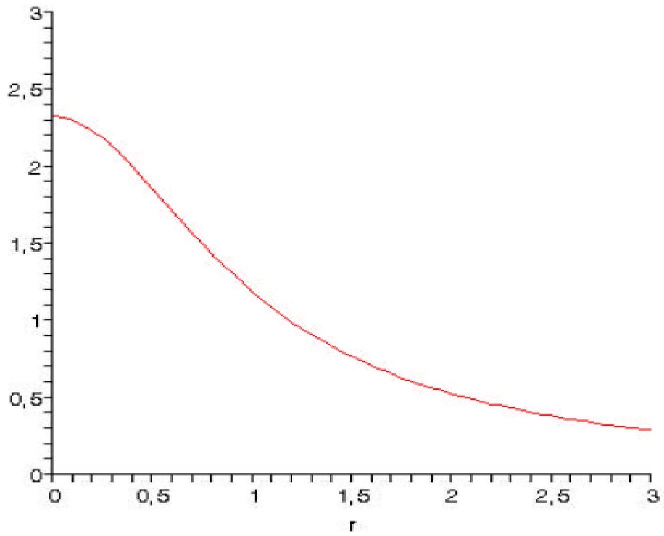
Az 1. példában a paraméterértékek

$$p = 2, \quad a = 2,3233, \quad b = 0,8081, \quad \beta = 5/6, \quad p' = 2$$

és az egzakt megoldás megadható

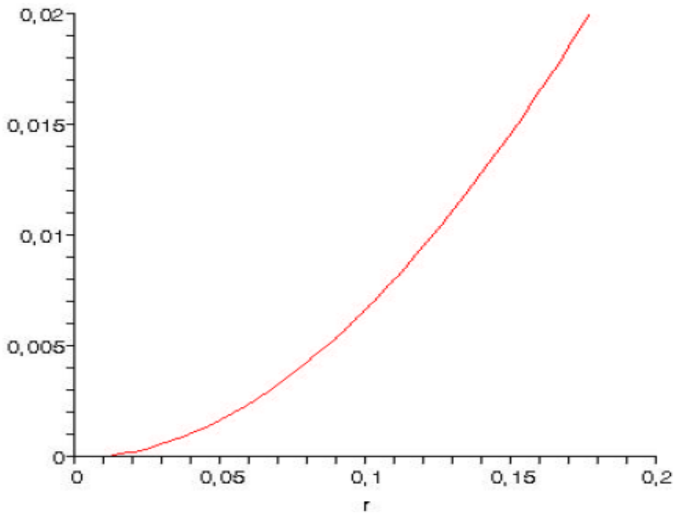
$$\overline{u}(r) = 2,3233 \left(\frac{0,8081}{0,8081 + r^2} \right)^{5/6},$$

alakban, amit az 5.1. ábrán szemléltetünk.



5.1. ábra

Így lehetőségünk van arra, hogy összehasonlítsuk az egzakt és a lokális megoldást. Az 5.2. ábrán ezen megoldások különbségét ábrázoljuk r függvényében a zérus közelében.



5.2. ábra

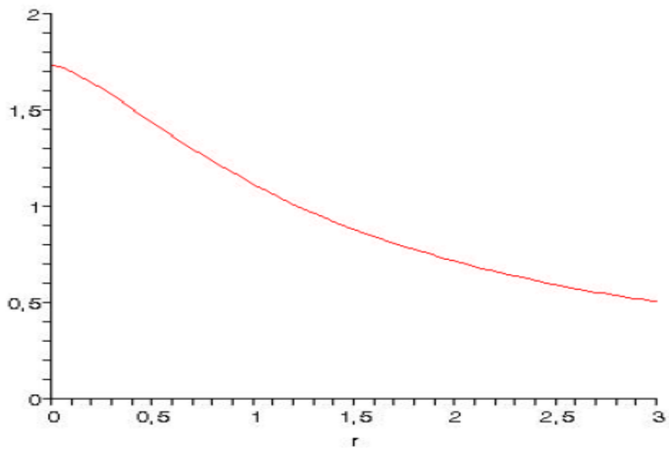
A 2. példabeli paraméterértékek:

$$p = 1,8, \quad a = 1,7380, \quad b = 1,4275, \quad \beta = 5/6, \quad p' = 1,44,$$

melyeknél az egzakt megoldás:

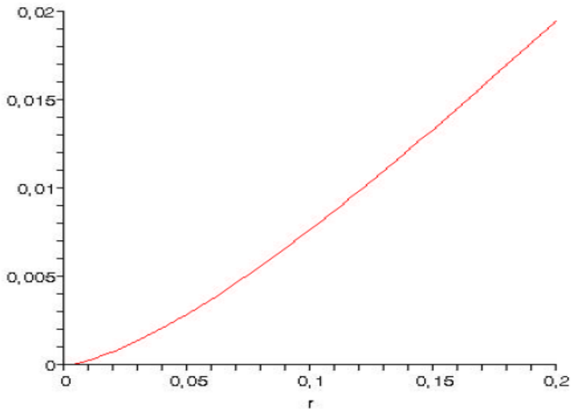
$$\overline{u}(r) = 1,7380 \left(\frac{1,4275}{1,4275 + r^{1,44}} \right)^{5/6}.$$

Az 5.3. ezt a megoldást ábrázoljuk $p = 1,8$ esetén.



5.3. ábra

Az egzakt és a hatványsor alakú megoldás közti különbséget az 5.4. ábrán szemléltetjük r függvényében a zérus közelében.



5.4. ábra

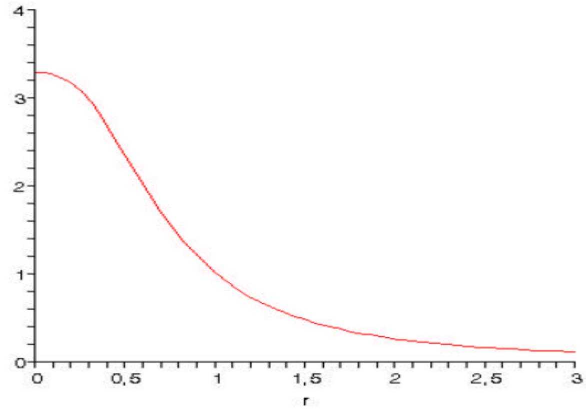
A 3. példában a paraméterértékek

$$p = 2,2, \quad a = 3,2884, \quad b = 0,3227, \quad \beta = 5/6, \quad p' = 2,64,$$

így az egzakt megoldás:

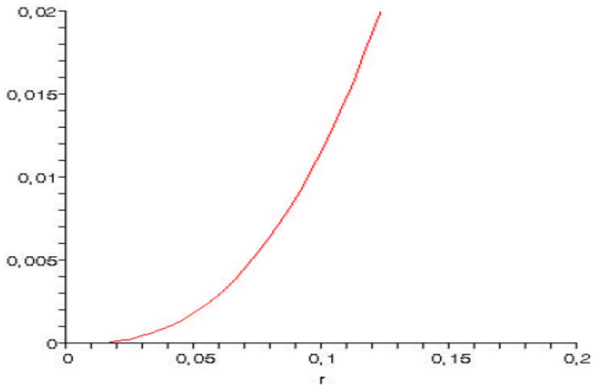
$$\overline{u}(r) = 3,2884 \left(\frac{0,3227}{0,3227 + r^{2,64}} \right)^{5/6}$$

alakú. Ezt a megoldást az 5.5. ábrán mutatjuk be.



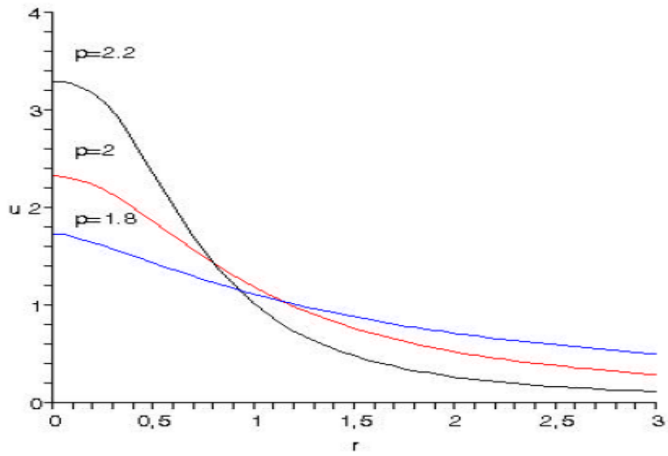
5.5. ábra

A két megoldás közti különbséget az előző példához hasonlóan egy a MAPLE-ben megírt programmal kaptuk. Az 5.6. ábra ezt a különbséget mutatja a zérus közelében.



5.6. ábra

Az 5.7. ábra mindhárom p paraméterérték esetén szemlélteti az egzakt megoldásokat.



5.7. ábra

5.7. Megjegyzés: *A hatványsor alakú megoldások az (5.5) feltétel nem teljesülése esetén is előállíthatóak.*

5.7 Perturbáció analízis

Ebben a részben a paraméterértékek változásának hatását vizsgáljuk az (5.3) kezdetiérték probléma analitikus hatványsor alakú megoldásaira nézve. Különböző p, n, γ és δ paraméterértékek esetén megadjuk a hatványsor alakú megoldásokat úgy, hogy ebből a négy paraméterből hármat rögzítünk és a negyediket változtatjuk. Minden megvizsgált esetben szublineáris és szuperlineáris kitevőket vettünk az f függvénynél, azaz $\gamma < 1$ és $\delta > 1$ értékeket tekintettük és nem változtattuk a kezdetiérték probléma megoldását a nullánál.

5.7.1 A p paraméter változásának hatása

Rögzítjük az n, γ és δ paramétereket a következőkben:

$$n = 3, \quad \gamma = 0,8, \quad \delta = 2$$

és megadjuk a hatványsor alakú megoldást $p = 1,5,\ 2,\ 3$ esetekben az 5.5. részben leírtak alapján. Az (5.3) kezdetiérték probléma $u_p(r)$ megoldása a három esetben a következő:
$p = 1,5$:

$$u_{1,5}(r) = 2 - 1,2207r^3 + 0,6095r^6 - 0,3047r^9 + 0,1526r^{12} - 0,0765r^{15} + \cdots$$

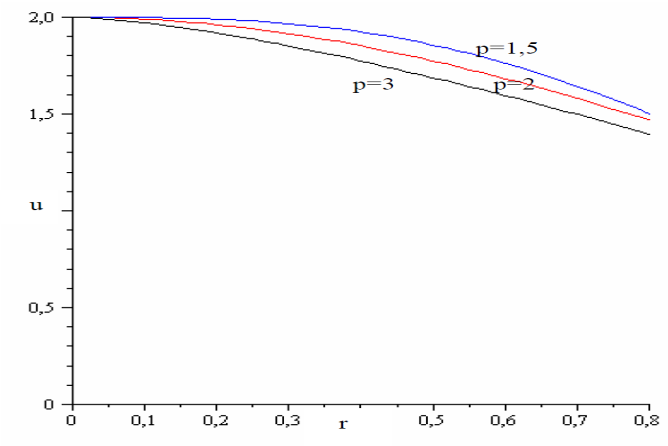
$p = 2$:

$$u_2(r) = 2 - 0,9568r^2 + 0,2247r^4 - 0,4616r^6 + 0,0886r^8 - 0,0016r^{10} + \cdots$$

$p = 3$:

$$u_3(r) = 2 - 0,9222r^{1,5} + 0,1159r^3 - 0,0086r^{4,5} + 0,0004r^6 - 0,109 \cdot 10^{-4}r^{7,5} + \cdots .$$

Az 5.8. ábrán ezt a három megoldást egy koordináta-rendszerben ábrázoltuk, ahol megállapíthatjuk, hogy p értékének növekedésével a megoldásfüggvények meredeksége is növekszik a zérus közelében.



5.8. ábra

5.7.2 A δ paraméter változásának hatása

Legyenek n, γ és p paraméterek adottak:

$$n = 3, \quad \gamma = 0,8, \quad p = 2$$

és $\delta = 1, 2, 3$ három különböző értéket tekintve megadjuk a lokális megoldásokat a nulla közelében.

Az $u_\delta(r)$-t MAPLE programmal számítottuk ki. A három esetben a megoldások:

$\delta = 1$:

$$u_1(r) = 2 - 0,6235r^2 + 0,0529r^4 - 0,0018r^6 + 0,3429 \cdot 10^{-4}r^8 + \cdots$$

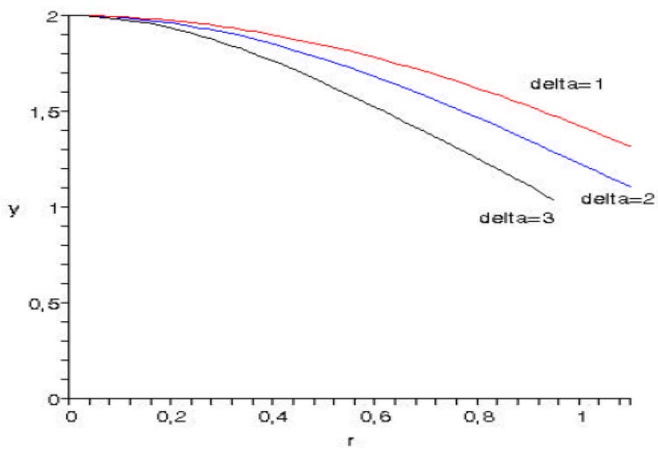
$\delta = 2$:

$$u_2(r) = 2 - 0,9568r^2 + 0,2247r^4 - 0,0462r^6 + 0,0088r^8 + \cdots$$

$\delta = 3$:

$$u_3(r) = 2 - 1,6235r^2 + 1,0306r^4 - 0,6859r^6 + 0,4581r^8 + \cdots .$$

Az 5.9. ábrán a δ változtatásával előállított lokális megoldásokat szemléltetjük, ahol megállapíthatjuk, hogy δ értékének növekedésével a lokális megoldások görbéjének meredeksége is növekszik.



5.9. ábra

5.7.3 A γ paraméter változásának hatása

Adottak a következő $n = 3$, $p = 3$ és $\delta = 1,5$ paraméterértékek, amelyeket nem változtatunk ebben a részben. Most a γ paramétert fogjuk változtatni és megadni az (5.4) probléma megoldását. A γ értékét 0,1, 0,4 és 0,9-nek választottuk. A megfelelő γ érték esetén kapott megoldások:
$\gamma = 0.1$:

$$u_{0.1}(r) = 2 - 0,7601r^{1,5} + 0,0537r^3 - 0,0017r^{4,5} - 0,2463 \cdot 10^{-4}r^6 - \cdots$$

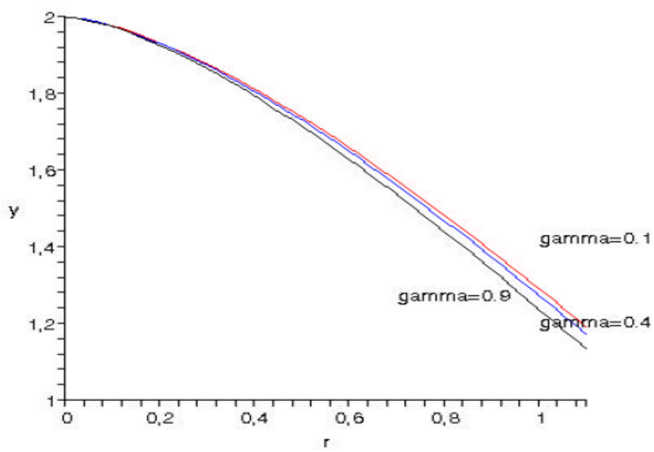
$\gamma = 0,4$:

$$u_{0,4}(r) = 2 - 0,7839r^{1,5} + 0,0588r^3 - 0,0014r^{4,5} - 0,1395 \cdot 10^{-4}r^6 - \cdots$$

$\gamma = 0,9$:

$$u_{0,9}(r) = 2 - 0,8339r^{1,5} + 0,0731r^3 - 0,0014r^{4,5} - 0,1838 \cdot 10^{-4}r^6 - \cdots$$

Az 5.10. ábrán láthatjuk az $u_{0,1}(r)$, $u_{0,4}(r)$ és $u_{0,9}(r)$ függvényeket, ahol megfigyelhető, hogy a görbék közti eltérés rendkívül kicsi. Tehát a megoldások γ-ra kevésbé érzékenyek.



5.10. ábra

5.7.4 Az n paraméter változásának hatása

Rögzített $p = 2$, $\gamma = 0,8$ és $\delta = 2$ esetén az n értékét 2, 4 és 6-nak választottuk. Az (5.3) probléma lokális megoldásai különböző n értékek esetén a következőek:
$n = 2$:

$$u_2(r) = 2 - 1,2119r^{5/3} + 0,2184r^{10/3} - 0,0298r^5 + 0,3225 \cdot 10^{-2}r^{20/3} - \cdots$$

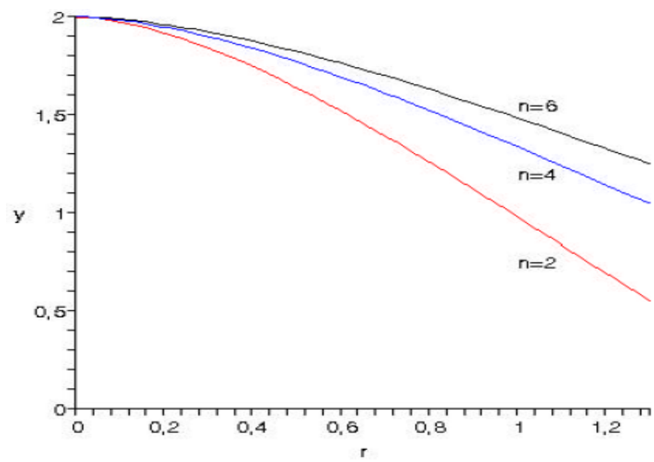
$n = 4$:

$$u_4(r) = 2 - 0,7634r^{5/3} + 0,1122r^{10/3} - 0,0121r^5 + 0,1089 \cdot 10^{-2}r^{20/3} - \cdots$$

$n = 6$:

$$u_6(r) = 2 - 0,5826r^{5/3} + 0,0724r^{10/3} - 0,6679 \cdot 10^{-2}r^5 + 0,5241 \cdot 10^{-3}r^{20/3} - \cdots .$$

Az 5.11. ábrán ez a három megoldás látható, ahol n értékének növekedésével a megoldásfüggvények meredeksége csökken.



5.11. ábra

6 Összefoglalás

6.1 A disszertáció rövid áttekintése

Az értekezés a matematika egy széles körben kutatott ágával a nemlineáris differenciálegyenletek egy típusával és azok megoldásainak vizsgálatával foglalkozik. Több esetben megadtuk a megoldások hatványsor alakú felírását, és a hatványsorban szereplő együtthatók meghatározására módszert adtunk. A dolgozatban szereplő egyenletek megoldásait konkrét példákon keresztül ábrákon is szemléltettük. A disszertáció első részében az úgynevezett hipergeometrikus függvények egy általánosításának hatványsor alakját és egy hárompontos peremérték feladat megoldhatóságának feltételeit ismertettük. A második részben két alkalmazás található, mely nemlineáris differenciálegyenletekből és a hozzájuk kapcsolódó peremfeltételekből indul ki.

A disszertációt az előzetesen önállóan, illetve társszerzőkkel közösen készített 15 már megjelent cikk és a konferenciákon tartott előadások alapján állítottam össze. A dolgozatok közül négy a MATHSCINET adatbázisában szereplő (és kettő impakt faktorral rendelkező) folyóiratokban, hazai, illetve külföldi konferencia kiadványokban jelent meg.

- Az értekezés első fejezete az irodalmi áttekintés mellett a kutatás célkitűzéseit tartalmazza.

- A második fejezetben adott a

$$(|y'|^{p-1}y')' + |y|^{p-1}y = 0, \quad p > 0 \tag{6.1}$$

nemlineáris differenciálegyenlet, melyhez $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket is tekintettük és így megoldásként a szinusz függvény egy általánosítása adódott. A másik megoldást, a koszinusz függvény egy általánosítását az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételek teljesülése esetén kaptuk.

Ha a (6.1) differenciálegyenlet bal oldalán a második tag előjelét negatívnak tekintettük és vettük a $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket, akkor a megoldás a szinuszhiperbolikusz függvény egy általánosítása. A másik megoldás egy általánosított koszinuszhiperbolikusz függvény az $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$ kezdeti feltételek teljesülése esetén adódott.

Rövid irodalmi áttekintést adtunk ezen függvényekről és többféleképpen megadtuk lehetséges általánosításukat. A függvényeket előállító nemlineáris differenciálegyenletek tulajdonságait bemutattuk, majd az így általánosított hipergeometrikus függvényeket hatványsor alakban írtuk fel úgy, hogy módszert adtunk mind a négy esetben a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására. A kidolgozott módszert a következő (általánosított szinusz) függvény esetén demonstráljuk:

- A 2.4. fejezetben a Briot-Bouquet tétel segítségével bebizonyítjuk a $\mathrm{S_p}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1}$ hatványsor alakban lévő kitevő alakját.
- A függvény elaszticitásának tulajdonságait felhasználva meghatározzuk a differenciálegyenletben lévő tagok elaszticitását.
- Rekurzív képletet adunk a hatványsorban szereplő együtthatókra.

A numerikus számításokat MAPLE-ben megírt programokkal végeztük, melyeket ábrákon is szemléltettünk. (Ezen programok közül kettő a mellékletben megtalálható.)

A fejezet végén egy hasonló eljárást mutatunk be a

$$\left(|y'|^{p-1}\, y'\right)' + (a - 2q\,\mathrm{S_p}'(2x))\,|y|^{p-1}\, y = 0 \tag{6.2}$$

kvázilineáris Mathieu egyenletre, ahol a és q konstansok és y eleget tesz a

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdeti feltételeknek. Célunk a (6.2) egyenlet megoldásának hatványsorba fejtése volt az

$$\mathrm{se_p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^{i(p+1)+1} = d_0 x + d_1 x^{p+2} + d_2 x^{2p+3} + \cdots ,$$

alakban. Módszert adtunk a d_0, d_1, $d_2, \cdots$ együtthatók meghatározására.

- A harmadik fejezetben a

$$x'' + \lambda x + g(t,x) = h(t), \quad x(0) = 0,\ B_\eta x = 0 \tag{6.3}$$

hárompontos peremérték feladat megoldásainak létezését vizsgáltuk, ahol $(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ paraméterek, g, h adott függvények és

$$B_\eta x := \begin{cases} x(\eta) - x(\pi) & , \quad \eta \neq \pi, \\ x'(\pi) & , \quad \eta = \pi. \end{cases}$$

A felírt problémát tekinthetjük, mint egy nemlineáris oszcillátor mozgásegyenletét, amely számos mechanikai és folyadékáramlási probléma esetén előfordul.

Szükséges és elégséges feltételeket adtunk meg g-re és h-ra úgy, hogy a (6.3) feladatnak az adott feltételekkel létezzen megoldása. Definiáltuk a feltételekhez szükséges halmazokat és függvényeket. Több tételben megfogalmaztuk a kapott eredményeket, amit be is bizonyítottunk (vagy hivatkoztunk már megjelent cikkekben található bizonyításokra). Különválasztottuk a homogén és az inhomogén esetet. Megvizsgáltuk a többszörös megoldások létezésének feltételeit. Több példán keresztül szemléltettük a többszörös megoldásokat a feladatban szereplő feltételek figyelembevételével. Megvizsgáltuk a példákban szereplő megoldásfüggvények számosságát.

- A disszertáció negyedik fejezete néhány folyadék mechanikai alkalmazást tárgyal: viszkózus folyadék lamináris áramlásakor fellépő hőfejlődést kör keresztmetszetű egyenes csőben. Ez a jelenség matematikailag nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerrel modellezhető. Ezen áramlások részletes analízise lehetővé teszi a megfelelő modellek értékelését és az ipari folyamatok numerikus előrejelzését. Erős hőmérsékletfüggő viszkozitás esetén nem kívánt jelenségek léphetnek fel a gyártási folyamatok során. Ebben a részben egy véges hosszúságú hengerben, állandósult nemnewtoni folyadékban létrejövő viszkózus hőfejlődést vizsgáltunk. A folyamatot leíró peremérték feladat megoldása során megadtuk a folyadék hőmérséklet eloszlását nemnewtoni, hatványfüggvényt feltételező modellre. Mivel a hőmérséklet emelkedését a cső közepén mérni nem lehet, vagy csak nagyon költséges módon, ezért fontos és ipari szempontból jelentős, hogy meg tudjuk adni az anyagban lejátszódó folyamatok matematikai modelljét. Célunk, az volt hogy megvizsgáljuk a hőmérsékletfüggő viszkozitás hatását a hőmérséklet eloszlására. Bemutattuk a BRALEN RB 03-23 típusú alacsony sűrűségű polietilén alapanyag reológiai paramétereinek kísérleti meghatározását és a mért értékek ismeretében a matematikai modellel meghatároztuk az anyagban létrejövő hőfejlődést. Felírtuk a mozgás- és energiaegyenlet megfelelő formáját:

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\overline{\eta}e^{-A\frac{T-T_0}{RT_0^2}}\left(-\frac{dv_z}{dr}^{n}\right)\right), \tag{6.4}$$

$$0 = \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] + \overline{\eta}e^{-A\frac{T-T_0}{RT_0^2}}\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n+1} \tag{6.5}$$

és ehhez vettük a

$$v_z(R_0) = 0 \quad , \quad v_z'(0) = 0,$$

$$T(R_0) = T_w \quad , \quad T'(0) = 0$$

peremfeltételeket. Az egyenletek numerikus megoldásait, a kísérletben szereplő mért értékekkel sikerült meghatározni.

A mért adatokból kiszámítottuk a deformációsebességet, a nyírófeszültséget, a dinamikus viszkozitást, az aktiválási energiát és a hőmérséklet növekményt. A gyártási technológia szempontjából ez az utóbbi a legfontosabb. A számításokat MAPLE-ben írt programokkal végeztük.

- Számos kémiai, fizikai, biológiai jelenséget reakció-diffúzió egyenletekkel írhatunk le. Az értekezés ötödik fejezetében egy nemlineáris reakció-diffúzió problémát mutattunk be, melynek vizsgáltuk a matematikai modelljét radiálisan szimmetrikus esetben, azaz

$$\begin{cases} (p-1)\left|u_r'\right|^{p-2}u_{rr}'' + \frac{n-1}{r}\left|u_r'\right|^{p-2}u_r' + f(u) = 0 \quad , \quad (0,\infty), \\ \qquad u_r'(0) = 0 \quad , \quad u(0) = \alpha \geq 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

kezdetiérték probléma megoldásait tekintettük, ahol $r = |x|$ és

$$f(u) = \begin{cases} u^{\gamma} + u^{\delta} \quad , \quad u \geqq 0, \\ 0 \quad , \quad u < 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

ahol γ és δ valós paraméterértékek. Megadtuk a lokális analitikus megoldás létezésének feltételét és meghatároztuk ezeket a megoldásokat az adott feltételek mellett. Módszert adtunk a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására, majd ellenőriztük is a módszer pontosságát. Ahol lehetett összehasonlítottuk az egzakt és lokális megoldásokat, majd a feladatban szereplő paraméterérték változásának hatását vizsgáltuk, melyeket ábrákkal szemléltettünk. A megoldások meghatározásában több MAPLE-ben írt programot használtunk.

- A hatodik fejezetben megadtuk a disszertáció rövid összefoglalását, kimondtuk a dolgozat fontosabb tételeire épülő téziseket és megfogalmaztuk a jövőbeli célkitűzéseinket.

- A hetedik fejezetben angol nyelven megadtuk a dolgozat rövid összegzését.

- A nyolcadik fejezetben egy mellékletben a disszertációban említett programok közül példaként hármat írtunk le.

- A disszertáció végén megadtuk a publikációs jegyzéket, különvéve a konferencia kiadványban és a folyóiratokban megjelent publikációkat. Felsoroltuk a cikkekre ismert hivatkozásokat, illetve a felhasznált irodalom jegyzékét.

6.2 Tézisek

6.2.1 Általánosított trigonometrikus függvények

Az általánosított trigonometrikus függvényeknek az irodalomban ismert többféle általánosítását tekintettem át egészen az 1800 -as évektől kezdődően. A 2. fejezetben ezen függvényeket kezdetiérték feladatok megoldásaiként definiáltam. Ahhoz, hogy meg tudjam adni a megoldások hatványsor alakját, felhasználtam az adott függvény elaszticitásának fogalmát.

1. tézis:

Megadtam egy módszert a szinusz, koszinusz, szinusz hiperbolikusz, illetve koszinusz hiperbolikusz függvények általánosításának hatványsor alakú előállítására és rekurzív összefüggéseket adtam az azokban szereplő együtthatók kiszámítására.

Az 1. tézis alapjául szolgáló állításokat, megjegyzéseket, a kifejlesztett módszert a disszertáció 2. fejezete és a [RE5], [RE6], [RE7], [RE8], [RE9] és a [RE10] publikációk tartalmazzák.

6.2.2 Hárompontos peremérték feladat

Tekintettem a (3.1) hárompontos peremérték problémát, ahol a differenciálegyenletben szereplő g és h függvényekre szükséges és elégséges feltételt adtam úgy, hogy a (3.1) problémának létezzen megoldása. Továbbá speciális esetként tekintettem a

$$x'' + \lambda \sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad B_\eta x = 0, \tag{6.8}$$

peremérték feladatot, ahol

$$B_\eta x := \begin{cases} x(\eta) - x(\pi) & , \quad \eta \neq \pi, \\ x'(\pi) & , \quad \eta = \pi. \end{cases}$$

Numerikus algoritmust adtam, mellyel a (6.8) feladat megoldásainak számát lehet reprezentálni. A bifurkációs diagramot FORTRAN nyelven illetve MATLAB-ban megírt programokkal szemléltettem és a (6.8) feladat zérustól különböző megoldásainak számát meghatároztam.

6.1. Definíció: *Definiáljuk a σ halmazt a következőképpen:*

$$\sigma := \{(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2 : \text{ úgy, hogy a (3.2) feladatnak létezik zérustól különböző } x = x(t),\ t \in \mathbf{R} \text{ valós megoldása}\}.$$

A 3.8. és 3.9. tétel, továbbá a 3.10. megjegyzés és 3.11. következmény alapján a következő tézist állítom fel:

2. tézis:

Megfogalmaztam és bebizonyítottam, hogy ha $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ és g függvény teljesíti a (3.9) feltételt, akkor a

$$x'' + \lambda x + g(t, x) = h(t) \quad , \qquad t \in (0, \pi)$$
$$x(0) = 0 \quad , \qquad B_\eta x = 0$$

peremérték problémának $(\eta, \lambda) \notin \sigma$ esetén létezik legalább egy megoldása. Illetve ha $h \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ és g függvények teljesítik a (3.10), (3.11) és (3.12) feltételeket, akkor a

$$x'' + \lambda x + g(t, x) = h(t), \quad x(0) = 0, \ x(\eta) = x(\pi) \tag{6.9}$$

feladatnak $(\eta, \lambda) \in \sigma$ esetén létezik legalább egy megoldása.

A 2. tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 3. fejezete, a [RE2], [RE4], [RE12] és a [RE14] publikációk tartalmazzák. A megoldásfüggvényeket és a σ halmazt MATLAB-ban megírt programokkal szemléltettem.

6.2.3 Folyadék mechanikai alkalmazás

Két alkalmazást mutatok be a disszertáció 4. és 5. fejezetében. A 4. fejezetben egy folyadék mechanikai alkalmazást tanulmányoztam. A folyadék áramlását leíró jelenséget matematikailag nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerrel modelleztem. A kísérletekben egy véges hosszúságú hengerben állandósult nemnewtoni folyadékban létrejövő viszkózus hőfejlődést elemeztem. A folyamatot leíró peremérték feladat megoldása során vizsgáltam a folyadék hőmérséklet eloszlását hatványfüggvényt feltételező modellre, Nahme-típusú hőmérséklettől függő viszkozitás esetén. Majd a modellt a mért adatokkal a megfelelő számítások elvégzése után kiértékeltem (lásd [RE15]).

Ezen kutatásokat alapján a következő tézist állítom fel:

3. tézis:

Nahme-típusú hőmérséklettől függő viszkozitás esetén csőben állandósult izoterm folyadékáramlást leíró (4.12)- (4.13) parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását visszavezettem a (4.18) nemlineáris közönséges differenciálegyenlet peremérték feladatára, ahonnan a cső keresztmetszetében kialakult hőmérséklet eloszlást numerikus módszerrel meghatároztam. Egy konkrét LDPE anyag esetén az anyagparamétereket mérési eredményekből kiszámítottam és a hőmérséklet eloszlást előállítottam.

6.2.4 Reakció-diffúzió egyenletek megoldásainak numerikus megadása

Az 5. fejezetben egy nemlineáris reakció-diffúzió problémát mutattam be, melynek megadtam a matematikai modelljét. Meghatároztam a lokális megoldásokat és ezek létezésének feltételeit. A megoldásfüggvények hatványsor alakjához módszert adtam a hatványsorban szereplő együtthatók kiszámítására, majd összehasonlítottam az egzakt és lokális megoldásokat. Perturbáció analízist végeztem a feladatban szereplő paraméterek értékei esetén.

A fejezetben szereplő tételek alapján a következő tézist állítom fel:

4. tézis:

Igazoltam, hogy az (5.4) kezdetiérték problémának létezik egyértelmű analitikus megoldása a zérus környezetében. A megoldásfüggvény hatványsor alakjában szereplő együtthatók rekurzív kiszámítására módszert dolgoztam ki.

Az 4. tézis alapjául az 5.3. tétel szolgált. A tételt következményével együtt az 5. fejezet tartalmazza. A tétel bizonyítása a [RE3] cikkben megtalálható. A hatványsor alakú megoldás együtthatóira adott módszert a disszertáció 5.5 fejezete tartalmazza. A lokális megoldások meghatározását példákon keresztül szemléltettem.

6.3 További tervek

Kutatásaink folytatására több lehetőség is kínálkozik. Természetes módon adódik, hogy a hipergeometrikus függvények további általánosítási lehetőségeit vizsgáljuk, Edmunds és Lang 2009-ben megjelent [23] cikke alapján, hiszen ezek napjainkban is újabb és újabb feladatok megoldásaként adódnak. Ezek közül néhányat az értekezés 2.2. fejezete már tartalmaz, de ilyen általánosítások a matematika számos területén megjelennek (például a Minkowski geometriában definiált izoperimetrix esetén). További célkitűzéseim között szerepel ezeknek az új kutatási eredményeknek a figyelemmel kísérése és az adott kutatásokban való esetleges részvétel.

A disszertáció másik témája egy adott hárompontos peremérték probléma vizsgálata volt. Itt különválasztottuk a rezonancia és a nem rezonancia esetét és megvizsgáltuk azt a két lehetőséget, amikor az egyenlet homogén illetve inhomogén. A többszörös megoldások keresésére algoritmust dolgoztunk ki. Ezen irány is továbbfejleszthető, hiszen tekinthetjük például (3.1) helyett a következő peremérték feladatok hasonló vizsgálatait:

a)

$$\begin{cases} (p(t)x'(t))' + \lambda q(t)x(t) = 0 \quad , \quad t \in (0,1) \\ x'(0) = 0, \quad x(\eta) = x(1) \quad , \quad 0 < \eta < 1 \end{cases}$$

Sturm-Liouville probléma, ahol a kutatások a p-től és q-tól függő $\widetilde{\sigma}$ halmaz megadására is irányulhatnak. A jövőben össze lehetne hasonlítani a disszertációban már megadott σ halmazt (lásd 3. fejezet) az új feladatbeli $\widetilde{\sigma}$-mal. Ezen feladatot nem csak a $[0,1]$ intervallumon vizsgálhjuk, hanem az elemzést ki lehet terjeszteni a valós számok halmazára is.

b)

$$\begin{cases} (|x'|^{p-2}x')' + \lambda |x|^{p-2}x = 0 \quad , \quad t \in (0,1) \\ x'(0) = 0, \, x(\eta) = x(1) \quad , \quad 0 < \eta < 1 \end{cases}$$

Ezen feladat megoldásainak több aspektusból való elemzése érdekes feladatnak kínálkozik, különösen a p paraméter változásának hatása a megoldásokra is egy jövőbeli kutatási feladat lehet.

A disszertációban szerepelt egy folyadék mechanikai alkalmazás. A hatványtörvénnyel jellemezhető reológiai tulajdonságú folyadékok különböző mechanikai vizsgálata a 4. fejezetbeli nemlineáris peremérték feladattól eltérő nemlinearitással rendelkező új feladatok matematikai vizsgálatát vetik fel. Ennek tanulmányozása már elkezdődött, mert nem csak az általunk vizsgált polimerek elemzése, hanem más reológiai tulajdonságú polimerek analizálása is aktuális kérdés napjainkban.

7 Summary

The topic of this thesis is the examination of certain type of nonlinear differential equations and its solutions. These topics are widely studied in mathematics with numerous applications. In many cases we have given the solutions in the form of power series. We have developed a method for the effective calculation of the coefficients to these series.

In the first part of the thesis we determined the power series expansion of the generalized hypergeometric functions and the solution of a three-point boundary value problem with two parameters. In the second part we described two applications. These equations have various applications in rheological problems and reaction-diffusion systems. We determined the numerical and approximate solutions of the nonlinear differential equations to these problems.

The dissertation is based on 15 papers published in international journals or in conference proceedings. Some of them are joint papers, written with one or more co-authors.

The first chapter contains an overview of the relevant scientific literature and describes the objectives of our research.

The second chapter is focused on the

$$(|y'|^{p-1}y')' + |y|^{p-1}y = 0, \quad p > 0 \tag{7.1}$$

nonlinear differential equation. Subject to the initial conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, its solution is called the generalized sine function, while $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$ yields the generalized cosine one.

If we change the sign of the second term in (7.1), we obtain the generalized hyperbolic sine function subject to the initial conditions $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, while the generalized hyperbolic cosine corresponds to the initial conditions $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$.

We are giving a literature review of the considered initial value problems. We discussed the properties of those differential equations that exhibit these functions and their solutions. We developed a method for the computation of the coefficients of the power series of the four functions.

Our method for the case of the generalized sine function is the following:

- In Section 2.5. we use the Briot-Bouquet theorem to show the form of the power series $\mathrm{S_p}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^{i(p+1)+1}$.

- A recursive formula for the coefficients was developed. We used the properties of the elasticity of the function to express the elasticity of the members in the differential equation.
- The final result is a recursive formula for the determination of the coefficients

The numerical error of the power series expansion is studied in a few cases. We used the MAPLE computer algebra system for the numerical computations.

At the end of the chapter we presented a similar method for the Mathieu equation

$$\left(|y'|^{p-1}\,y'\right)' + (a - 2q\,\mathrm{S_p}'(2x))\,|y|^{p-1}\,y = 0, \tag{7.2}$$

where a and q are constants and the function y satisfies the pair of initial conditions

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

The third chapter investigates the global existence problem of the solution to the three-point boundary value problem

$$x'' + \lambda x + g(t,x) = h(t), \quad x(0) = 0, \; B_\eta x = 0, \tag{7.3}$$

where

$$B_\eta x := \begin{cases} x(\eta) - x(\pi) & , \quad \eta \neq \pi, \\ x'(\pi) & , \quad \eta = \pi. \end{cases}$$

Here $(\eta, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ are parameters, while g and h are suitable functions.

The examined problem can be considered as an equation of the motion of a forced nonlinear oscillator.

We derived necessary and sufficient conditions for g and h to ensure the existence of global solution to (7.3). We formulated our results in several theorems. The homogenous and inhomogenous cases were treated separately. Several functions and sets that occur in our theorems were defined. We studied the existence of multiple solutions, and we presented several examples of this phenomenon.

The topic of the fourth chapter is an application in fluid mechanics. We studied the temperature distribution of a viscous, laminar flow in a tube. The mathematical model of this phenomenon can be described by a system of nonlinear partial differential equations. The viscosity of certain polymers has a strong temperature dependence. This fact can cause serious problems during the manufacturing process. We assumed that the non-Newtonian nature of the fluid is described by the Oswald-de Wale power law model. Using this assumption we derived the temperature distribution. Since temperature measurement is almost impossible in the center of the tube, it is important to develop a mathematical model for the manufacturing processes. We presented the experimental determination of the rheological parameters for a low density polyethylene BRALEN RB 03-23. These measured quantities allow us to develop a mathematical model, which defines the heat in the centre of the tube. The experiments were executed in the laboratory of the BorsodChem Zrt. in Kazincbarcika.

Using the axial symmetry, the momentum and energy equations are:

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\overline{\eta}e^{-A\frac{T-T_0}{RT_0^2}}\left(-\frac{dv_z}{dr}^{n}\right)\right), \tag{7.4}$$

$$0 = \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{dT}{dr}\right)\right] + \overline{\eta}e^{-A\frac{T-T_0}{RT_0^2}}\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n+1} \tag{7.5}$$

with suitable boundary conditions. We applied the experimental data for the determination of the parameters to get the numerical solutions to the equations (7.4) -(7.5).

A formula by Rabinowitsch was used to compute the deformation rate. We derived the values of the shear tension and the dynamic viscosity, the activation energy and the temperature increase from the measured data. As far as manufacturing technology is concerned, the latter quantity is the most significant one.

The reaction-diffusion equation can be used to describe several chemical, biological and physical systems. In the fifth chapter of the thesis we presented a nonlinear reaction-diffusion problem. Its mathematical model is described by the

$$\begin{cases} r^{1-n}\left(r^{n-1}\left|u_r'\right|^{p-2}u_r'\right)' + f(u) = 0 \quad , \qquad (0,\infty), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_r'(0) = 0 \quad , \qquad u(0) = \alpha \geq 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

initial value problem. We derived conditions for the existence of local solutions and determined them by power series form, namely we gave a method for the calculation of the coefficients of the series. We carried out several numerical experiments to check the accuracy of the series, then we performed a perturbation analysis of the solutions with respect to the parameters of the problem. MAPLE was used for the numerical calculations.

In the sixth chapter we summarized the results and theorems of our thesis and we also discussed a few possible directions of future research.

The seventh chapter is an English summary of the dissertation.

At the end of the dissertation we presented a list of our publications. It contains the articles published in international journals and conference proceedings separately. We attache a list of our citations and a bibliography, as well.

8 MELLÉKLETEK

Az alábbi MAPLE-ben írt programot az általánosított szinusz függvény rajzolására használtuk:

$restart;$
$a[0] := 1;$
$b[0] := 1;$
$c[0] := -1;$
$for\ \ k\ \ from\ \ 1\ \ to\ \ 25\ \ do$
$b[k] := factor((c[k-1])/((k)*(p+1)));$
$a[k] := factor(b[k]/(k*(p+1)+1));$
$A[k] := factor(k*a[k] - sum(A[i]*a[k-i], i = 1..k-1)):$
$B[k] := factor(k*b[k] - sum(B[i]*b[k-i], i = 1..k-1)):$
$C[k] := factor(p*A[k] - (p-1)*B[k]):$
$c[k] := factor((-1/k)*(C[k] - sum(C[i]*c[k-i], i = 1..k-1))):$
$od:$
$d := (Pi/(1+p))/(sin(Pi/(1+p))):$
$for\ \ j\ \ from\ \ 10\ \ to\ \ 20\ \ do$
$l[j] := subs(p = (0.1*j), sum(a[i]*x^(i*(p+1)+1), i = 0..25));$
$od:$
$for\ \ j\ \ from\ \ 10\ \ to\ \ 20\ \ do$
$print(0.1*j);$
$print(evalf(subs(p = 0.1*j, d)));$
$plot(l[j], x = 0..(subs(p = 0.1*j, d)), y = 0..2);$
$od;$
$with(plots):$
$for\ \ j\ \ from\ \ 10\ \ to\ \ 20\ \ do$
$p[j] := plot(l[j], x = 0..(subs(p = 0.1*j, d)), y = 0..2):$
$od:$
$display(p[10], p[11], p[12], p[13], p[14], p[15], p[16], p[17], p[18], p[19], p[20]);$

Ezzel a programmal $p = 1$-től kezdve 2-ig 0,1 lépésközökkel minden egyes p érték esetén megadjuk a megfelelő $\widehat{\pi}/2$ értéket, ameddig ezen általánosított szinusz függvényt ez esetben értelmeztük. Azután a program kirajzolja egyenként, majd pedig egy közös koordinátarendszerbe ezeket a függvényeket.

A második program a 2. fejezetben szereplő (2.13) kezdetiérték feladat numerikus és a hatványsor alakú közelítő megoldás különbségét szemlélteti (lásd 2.5 ábra).

```
restart;
a[0] := 1;
b[0] := 1;
c[0] := −1;
for k from 1 to 40 do
b[k] := factor((c[k − 1])/((k) ∗ (p + 1)));
a[k] := factor(b[k]/(k ∗ (p + 1) + 1));
A[k] := factor(k ∗ a[k] − sum(A[i] ∗ a[k − i], i = 1..k − 1)) :
B[k] := factor(k ∗ b[k] − sum(B[i] ∗ b[k − i], i = 1..k − 1)) :
C[k] := factor(p ∗ A[k] − (p − 1) ∗ B[k]) :
c[k] := factor((−1/k) ∗ (C[k] − sum(C[i] ∗ c[k − i], i = 1..k − 1))) :
od :
dpi := (Pi/(1 + p))/(sin(Pi/(1 + p))) : simplify(dpi);
lj := 1 ∗ (sum(a[i] ∗ x^(i ∗ (p + 1) + 1), i = 0..2));
with(plots) : plot((lj, x = 0..dpi), y = 0..2);
pj := plot((lj, x = 0..dpi), y = 0..1) :
deq2 := diff(y(x), x2)*(diff(y(x), x1))^(p − 1) = −(y(x))^p;
init2 := y(0) = 0, D(y)(0) = 1;
pk := dsolve(deq2, init2, type = numeric, range = 0..dpi,
output = listprocedure);
pk1 := eval(y(x), pk);
s := [0, 0];
d := evalf(dpi);
for j from 0.001 to d by 0.001 do z[j ∗ 1000 + 1] :=
abs(subs(x = j, lj) − pk1(j));
s := s, [j, z[j ∗ 1000 + 1]] : od :
s := (s) :
s := [s] :
plot(s);
```

A harmadik programot a disszertáció 5.7.1 fejezetében használtuk, mikor a p paraméter változásának hatását tanulmányoztuk.

$restart;$
$alf := 2;$
$p := 3;$
$delt := 2;$
$gam := 0.8;$
$n := 3;$
$beta := 3;$
$g[0] := alf; g[1] := ((1-p)/p)*(((alf^{gam} + alf^{delt})/n)^{(1/(p-1))});$
$G[0] := alf^{gam}; B[0] := alf^{delt};$
$P[0] := (-g[1]*(p/(p-1)))^{(p-1)};$
$for\ \ k\ \ from\ \ 1\ \ to\ \ 6\ \ do$
$G[k] := (1/(k*alf))*sum(((k-j)*gam-j)*G[j]*g[k-j],$
$j = 0..k-1);$
$B[k] := (1/(k*alf))*sum(((k-j)*delt-j)*B[j]*g[k-j],$
$j = 0..k-1);$
$P[k] := sum(((k-j)*(p-1)-j)*P[j]*(g[k+1-j])$
$*((k+1-j)/(g[1]*k)),$
$j = 0..k-1);$
$solve(-P[k]*(n+((k*p)/(p-1)))+G[k]+B[k] = 0,$
$g[k+1]) : g[k+1] :$
$= evalf(solve(-P[k]*(n+((k*p)/(p-1)))+G[k]+B[k] = 0,$
$g[k+1])); \quad od;$
$l0 := 2 - .9568501880*r^2 + .2246894964*r^4 - 0.4616479504e - 1*r^6$
$+0.8860093445e - 2*r^8 - 0.1620910380e - 2*r^{10} + 0.2876712612e$
$-3*r^{12} - 0.4990283905e - 4*r^{14};$
$l1 := 2 - 1.220749710*r^3 + .6095325281*r^6 - .3046774100*r^9$
$+.1526515630*r^{12} - 0.7655983403e$
$-1*r^{15} + 0.3841663054e - 1*r^{18} - 0.1928234596e - 1*r^{21};$
$l2 := g[0] + g[1]*r^{1.5} + g[2]*r^3 + g[3]*r^{4.5} + g[4]*r^6 + g[5]*r^{7.5}$
$+g[6]*r^9 + g[7]*r^{10.5};$
$w1 := plot(l0, r = 0..1.1, y = 0..2) : w2 := plot(l1, r = 0..1.1, y = 0..2,$
$color = blue) :$
$w3 := plot(l2, r = 0..1.1, y = 0..2, color = black) : with(plots) :$
$display(w1, w2, w3);$

Az értekezés témakörében készített folyóiratcikkek

[RE1] BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *The Power Series Solutions of some Nonlinear Initial Value Problems*, WSEAS Transactions on Mathematics, **6** (2006), 627–635.

[RE2] BOGNÁR, G., ČEPIČKA, J., DRÁBEK, P., NEČESAL, P., ROZGONYI, E.: *Necessary and sufficient conditions for the existence of solution to three-point BVP*, Nonlinear Analysis, **69** (2008), 2984–2995. (IF=1,295)

[RE3] BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *The local analytic solution to some nonlinear diffusion-reaction problems*, WSEAS Transactions on Mathematics, **6** (2008), 382–395.

[RE4] BOGNÁR, G., ČEPIČKA, J., DRÁBEK, P., NEČESAL, P., ROZGONYI, E.: *Two-parametric three-point problem*, Nonlinear Analysis, **72** (2010), 3707–3721.(IF=1,487)

Konferencia kiadványban megjelent publikációk

[RE5] ROZGONYI, E.: *Az általánosított szinusz függvény közelítése*, Doktoranduszok Fóruma szekciókiadvány, Miskolci Egyetem, Miskolc (2004), 243–249.

[RE6] ROZGONYI, E.: *The Series Expansions of the Generalized Sine Function*, microCAD 2005, International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, (2005), ISBN: 963-661-653-1, 143–149.

[RE7] ROZGONYI, E.: *Kvázilineáris Mathieu-egyenlet hatváysor alakú megoldásai*, Doktoranduszok Fóruma szekciókiadvány, Miskolci Egyetem, Miskolc (2005), 190–196.

[RE8] ROZGONYI, E.: *The Generalized Hyperbolic Function*, microCAD 2006, International Scientific Conference, Miskolc (2006), ISBN: 963-661-707-4, 95–101.

[RE9] ROZGONYI, E.: *Hipergeometrikus függvények* Tavaszi Szél Konferencia, Kaposvári Egyetem, Kaposvár (2006), ISBN 963-229-773-3, 307–310.

[RE10] BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *The series expansions of generalized hypergeometric functions*, 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey (2006), ISBN:960-8457-45-9, 181–186.

[RE11] BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *On the radial solution for some nonlinear initial value problems*, Applied Mathematics for Science and Engineering, Proc. of the 12th WSEAS Int. Conference on Applied Math., Cairo, Egyipt (2007), ISBN: 978-960-6766-27-5, 15–21.

[RE12] ROZGONYI, E.: *Hárompontos peremértékfeladat megoldásának vizsgálata*, Doktoranduszok Fóruma szekciókiadvány, Miskolci Egyetem, Miskolc (2008), 64–70.

[RE13] ROZGONYI, E.: *Power Series Solution for a Nonlinear Reaction-Diffusion Problem*, microCAD 2008, International Scientific Conference, Miskolc (2008), ISBN: 978-963-661-818-6, 61–67.

[RE14] ROZGONYI, E.: *The Multiplicity of the Solutions for a Three-Point Boundary Value Problem*, microCAD 2009, International Scientific Conference, Miskolc (2009), ISBN: 978-963-661-872-8, 47–53.

[RE15] BOGNÁR, G., MAROSSY, K., ROZGONYI, E.: *Calculation of the Temperature Distribution for Polymer Melt*, Latest Trends on Engineering Mechanics, Structures, WSEAS Press (2010), ISBN:978-960-474-203-5, 348–354.

Hivatkozások jegyzéke

[RE1] **BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *The Power Series Solutions of some Nonlinear Initial Value Problems*, WSEAS Transactions on Mathematics, 6 (2006), 627–635.**

[RE1-1] DONG, W., WANG, N., DANG, C.: *Uniqueness of positive solutions for Neumann problems in unbounded domain*, WSEAS Transactions on Mathematics, **7** (2008), 637–646.

[RE1-2] DONG, W., Ji, T.: *Uniqueness of positive solutions for degenerate logistic Neumann problems in a half space*, WSEAS Transactions on Mathematics **9** (2010), 67–77.

[RE2] **BOGNÁR, G., ČEPIČKA, J., DRÁBEK, P., NEČESAL, P., ROZGONYI, E.: *Necessary and sufficient conditions for the existence of solution to three-point BVP*, Nonlinear Analysis 69 (2008), 2984–2995. (IF=1,295)**

[RE2-1] LIU, Y.: *Non-homogeneous boundary-value problems of higher order differential equations with p-Laplacian*, Electronic J. of Differential Equations (2008), 1–43.

[RE2-2] ZHAO, J., WANG, L., GE, W.: *Necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions of fourth order multi-point boundary value problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **72** (2010), 822–835.

[RE2-3] ZHAO, J., GE, W.: *A necessary and sufficient condition for the existence of positive solutions to a kind of singular three-point boundary value problem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **71** (2009), 3973–3980.

[RE3] **BOGNÁR, G., ROZGONYI, E.: *The local analytic solution to some nonlinear diffusion-reaction problems*, WSEAS Transactions on Mathematics, 6 (2008), 382–395.**

[RE3-1] DONG, W., JI, T., ZHAO, X.: *Oscillation and non-oscillation criteria for quasi-linear second order differential equations*, WSEAS Transactions on Mathematics, **7** (2008), 627–636.

[RE3-2] DONG, W., WANG, N., DANG, C.: *Uniqueness of positive solutions for Neumann problems in unbounded domain*, WSEAS Transactions on Mathematics, **7** (2008), 637–646.

[RE3-3] DONG, W., JI, T.: *Uniqueness of positive solutions for degenerate logistic Neumann problems in a half space*, WSEAS Transactions on Mathematics, **9** (2010), 67–77.

[RE3-4] MORGADO, M. L., LIMA, P.: *Finite difference solution of a singular boundary value problem for the p-Laplace operator*, Numerical Algorithms, **55** (2010) 337–348.

Irodalomjegyzék

[1] ABEL, N.H.: *Methode générale detrouver des fonctions d'une seule quantité variable*, Magazin för Naturvidenskaberne **1** (1823), 1–10.

[2] ATKINSON, F.V., ELBERT, Á.: *An extension of Milloux's theorem to half-linear differential equations*, EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDE (2000), 1–10.

[3] BIRD, R.,B., AMSTRONG, R.,C., HASSAGER, O.: *Dynamics of Polymeric Liquids*, Fluid Dynamics, Wiley, New York (1987).

[4] BIRD, R.,B., ÖTTINGER, H.,C.: *Transport properties of polymeric liquids*, Ann. Revs. Phys. Chem., **54** (1992), 371–406.

[5] BIRD, R.,B., CURTISS, C.,F.: *Nonisothermal Polymeric Fluids*, Rheol. Acta, **35** (1996), 103–109.

[6] BIRD, R.,B., GRAHAM, M.,D.: *General Equations of Newtonian Fluid Dynamics*, Chapter 3 of The Handbook of Fluid Dynamics, Richard W. Johnson, Editor, CRC Press, Boca Raton (1998)

[7] BLASIUS, H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Phys., **56** (1908), 137.

[8] BOGNÁR, G.: *Numerical and Analytic Investigation of Some Nonlinear Problems in Fluid Mechanics*, in N. Mastorakis: Computers and Simulation in Modern Science, WSEAS Press (2008) ISBN: 978-960-474-032-1, 172–180.

[9] BOGNÁR, G.: *On the solution of some nonlinear boundary value problem*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysis (1992), 2449–2458.

[10] BOGNÁR, G.: *The application of isoperimetric inequalities for nonlinear eigenvalue problems*, WSEAS Transactions on Systems, **1** (2002), 119–124.

[11] BOGNÁR, G.: *Local analytic solutions to some nonhomogeneous problems with p-Laplacian*, Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (2008), 1–8.

[12] BOGNÁR, G., DRÁBEK, P.: *The p-Laplacian equation with superlinear and supercritical growth, multiplicity of radial solutions*, Nonlinear Analysis Series A, Theory and Methods **60** (2005), 719–728.

[13] BOGNÁR, G., RONTÓ, M., RAJABOV, N.: *On initial value problems related p-Laplacian and pseudo-Laplacian*, Acta Math. Hungar., **108** (2005), 1–12.

[14] BRIOT, CH., BOUQUET, J.K.: *Étude desfunctions d'une variable imaginaire*, Journal de l'École Polytechnique, Cashier **36** (1856), 85–131.

[15] CAÑADA, A.: *Nonselfadjoint semilinear elliptic boundary value problems*, Am. Mat.Pura Appl.,IV. Ser.148 **CXLVIII** (1987), 237–250

[16] CARAUS, I., MASTORAKIS, N. E.: *The numerical solution for singular integro-differential equations in generalized Hölder spaces*, WSEAS Transactions on Mathematics, **5** (2006), 439–444.

[17] DIMITROVSKI, D., MIJATOVIC, M.: *New approach to the theory of differential equations*, Math. Institute St. Cyril-Methodi, University of Skopje, Republic of Macedonia (1996)

[18] DIMITROVSKI, D., RAJOVIC, M., STOJILJKOVIC, R.: *On types, form and supremum of the solutions of the linear differential equationof the second order with entire coefficients*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, **1** (2007), 360–370.

[19] DOSLY, O.: *Qualitative theory of half-linear second order differential equations*, Proceedings of Equadiff 10, Czechoslovak International Conference on Differential Equations and Their Applications, Prague (2001), 37–50.

[20] DOSLY, O., REHÁK, P.: *Half-linear Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies **202**, Elsevier, Amsterdam, (2005)

[21] DRÁBEK, P., MANÁSEVICH, R.: *On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p-Laplacian*, Differential and Integral Equations, **12** (1999), 773–788.

[22] DRÁBEK, P., MILOTA, J.: *Methods of Nonlinear Analysis, Applications to Differential Equations*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, (2007)

[23] EDMUNDS, D., LANG, J.: *Generalizing trigonometric functions from different points of view*, math.ohio-state.edu, (2009)

[24] ELBERT, Á.: *A half-linear second order differential equation*, Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II, Szeged (1979), 153–179, Coll. Math. Soc. János Bólyai, **30**, North-Holland, Amsterdam-New York, (1981)

[25] ELBERT, Á.: *On the half-linear second order differential equations*, Acta Math. Hung. **49** (1987), 487–508.

[26] ERDÉLYI, A.: *Asymptotic Expansions*, New York, Dover (1987)

[27] ESTEBAN, J.R., VAZQUEZ, J.L.: *On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media*, Nonlinear Analysis, **10** (1986), 1303–1325.

[28] FARKAS, M.:*Speciális függvények*, Műszaki könyvkiadó Budapest (1964)

[29] FENG, W., WEBB,J.R.L.: *Solvability of three point boundary value problems at resonance*, Nonlinear Alalysis TMA **30** (1997), 3227–328.

[30] GEE, R., E., LYON, J., B.: *Nonisothermal flow of viscous non-newtonian fluids*, Industrial and engineering chemistry, **49** (1957), 956–960.

[31] HENRICI, P.: *Applied and computational complex analysis*, Power series-integration-conformal mappings-location of zeros. Wiley, New York-London-Sydney-Toronto (1974)

[32] HERRERO, M.A., VAZQUEZ, J.L.: *On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation*, Communications in Partial Differential Equations, **7** (1982), 1381–1402.

[33] HILLE, E.: *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley, New York (1976)

[34] HOLUBOVÁ, G., Necesal, P.: *Nontrivial Fucík spektrum of one non-delfadjoint operator*, Nonlinear Alalysis **69** (2008), 2930–2941.

[35] INCE, E.L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publ., New York (1956)

[36] JAROS, J., KUSANO, T.: *A Picone type identity for second order half-linear differential equations*, Acta Math. Univ. Comenianae Vol. LXVIII, **1** (1999), 137–151.

[37] KALIAPPAN, P.: *An exact solution for travelling waves of* $u_t = Du_{xx}+u-u^k$, Physica **11D** (1984), 368–374.

[38] LAJOS, T.: *Az áramlástan alapjai*, Egyetemi tankönyv, Budapest (2008)

[39] KUROKAWA, N., WAKAYAMA, M.: *Period deformations and Raabe's formulas for generalized gamma and sine functions*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 171–187.

[40] LANDESMANN, E.M., LAZER, A.C.: *Linear eigenvalues and a nonlinear-boundary value problem*, Pacific J. Math. **33** (1970), 311–328.

[41] LAZER, A.C., LEACH, D.E.: *On a nonlinear two-point boundary value problem*, J. Math.Anal. Appl. **26** (1969), 20–27.

[42] LEVIN, V.I.: *Notes on inequalities.II.*, On a class of integral inequalities, Rec.math., Moscou, N.S., **4** (1938), 309–322.

[43] LIMA, P., MORGADO, L.: *Asymptotic and numerical approximation of a boundary value problem for a quasi-linear differential equation*, WSEAS Transactions on Mathematics, **6** (2007), 639–647.

[44] LIN, C-S., NI, W-M.: *A counterexample to the nodal domain conjecture and a related semilinear equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), 271–277.

[45] LINDQVIST, P.: *Some remarkable sine and cosine functions*, Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics, Researcs Reports **A321**, (1993)

[46] LINDQVIST, P., PEETRE, J.: *Erik Lundberg's Theory of Goniometric Functions*, Lund University, Centre of Mathematical Sciences Mathematics (2003)

[47] LINDQVIST, P.: *Note on a nonlinear eigenvalue problem*, Rocky Mt. J. Math. **23** (1993), 281–288.

[48] LUNDBERG, E.: *On hypergeometric functions of complex variables*, Translated by Jaak Peetre with the assistance of Julia and Peetre Lindqvist, http://www. maths.lth.se/matematiklu/personal/jaak/engJP.html

[49] MAROSSY, K., LUDVIGNÉ TARJÁNYI É.: *PVC rendszerek gyúrókamrás vizsgálatának újszerű értékelése*, Műanyag és Gumi **17** (1980), 110–116.

[50] MARTIN, B.: *Some analytical solutions for viscometric flows of power-law fluids with heat generation and temperature dependent viscosity*, Int. J. Nonlinear Mech., **2** (1967), 285–301.

[51] MCKELVEY, J., M.: *Polimerek feldolgozása*, Műszaki könyvkiadó, Budapest (1966)

[52] MIDLEMANN, S.: *The Flow of High Polymers*, Interscience, New York (1968)

[53] ÖZBEKLER, A., ZAFER, A.: *Sturmian comparison theory for linear and half-linear impulsive differential equations*, Nonlinear Analysis **63** (2005), 289–297.

[54] PEETRE, J.: *The differential equation* $y'^p - y^p = \pm 1, (p > 0)$, University of Stockholm, Department of Mathematics, Report No. **12** (1992).

[55] RAJOVIC, M., DIMITROVSKI, D., STOILJKOVIC, R., RADOSAVLJEVIC, D.: *Sturm theorems for linear nonhomogeneous differential equation of the second order and localizations of the zeros of its solution*, Acta Mathematica Hung. (2011) (megjelenés alatt)

[56] REICHEL, W., WALTER, W.: *Radial solutions of equations and inequalities involving the p-Laplacian*, J. Inequal. Appl., **1** (1997), 47–71.

[57] RODRIGUEZ, F.: *Principles of Polymer Systems*, 2nd ed. McGraw-Hill, (1987) 536, ISBN0-07-Y66514-1.

[58] SANSONE, G.: *Equazioni diferenziali nel campo reale I.,II.*, Zanichelli, Bologna (1949)

[59] SCHLICHTING, H., GERSTEN, K.: *Boundary Layer Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2000)

[60] SCHMIDT, E.: *Über die Ungleichung, welche die Integrale Über eine Potenz einer Funktion and über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet*, Math. Ann., **117** (1940), 301–326.

[61] SCHOWALTER, W.R.: *Mechanics of Non-Newtonian fluids*, Pergamon Press, Oxford (1978)

[62] SUN, Y.: *Eigenvalues and symmetric positive solutions for a three-point boundary-value problem*, Electron J. Differential Equations Paper No. **127** (2005) 7 pages.

[63] TESCHL, G.: *Ordinary Differential Equations and Dynamic Systems*, http://www.mat.univie.ac.at/gerald/ftp/book-ode/ode.pdf

[64] TOOR, H.L.: *The energy equation for viscous flow*, Industrial and engineering chemistry, **48** (1956), 922–926.

[65] TOOR, H.L.: *Heat transfer in forced convection with internal heat generation*, A.I.CH.E. Josurnal, **4** (1958), 319–323.

[66] UNGAR, A.: *Generalized hyperbolic functions*, Am. Mon., **89** (1982), 688–691.

[67] WU, Z., ZHAO, J., YIN, J., LI, H.: *Nonlinear Diffusion Equations*, World Scientific (2001)

[68] WHITTAKER, E. T., WATSON, G. N.: *A course of modern analysis*, Cambridge at the university press (1950)

[69] YANG, Z., XU, B.: *Entire bounded solutions for a class of quasilinear elliptic equations*, Boundary Value Problems **2007**, Article ID 16407, 8 pages, doi:10.1155/2007/16407.