

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

NEWTONI ÉS NEM-NEWTONI FOLYADÉKOK HATÁRRÉTEG PROBLÉMÁINAK NUMERIKUS ÉS ANALITIKUS VIZSGÁLATA SÍKFELÜLETEN

PhD értekezés tézisei

Készítette:

Hriczó Krisztián

okleveles mérnök-informatikus

AKI PhD FOKOZAT ELNYERÉSÉRE PÁLYÁZIK

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

Doktori iskola vezető:

Prof. Dr. Szigeti Jenő

A MATEMATIKAI TUDOMÁNY KANDIDÁTUSA

Tudományos vezető:

Vadászné Prof. Dr. Bognár Gabriella

AZ MTA DOKTORA

Miskolc

2014

Köszönetnyilvánítás A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	3
2. A DISSZERTÁCIÓ RÖVID ÁTTEKINTÉSE	6
2.1. ÁRAMLÁS LEJTŐN	6
2.1.1. I. TÉZIS	7
2.2. MARANGONI-HATÁS VIZSGÁLATA	7
2.2.1. II. TÉZIS	9
2.3. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS MOZGÓ, ÁTERESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT	9
2.3.1. III. TÉZIS	11
2.4. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS PORÓZUS KÖZEGBE HELYEZETT FÜGGŐLEGES SÍKLAP MENTÉN	11
2.4.1. IV. TÉZIS	14
3. ÖSSZEFOGLALÁS	15
3.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TERVEZETT KUTATÁSI IRÁNYOK	15
4. SUMMARY	16
4.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS	16
4.2. THESES	16
I. THESIS	16
II. THESIS	17
III. THESIS	17
IV. THESIS	17
Az értekezés témakörében készített saját publikációk	18
FOLYÓIRATCIKKEK	18
KONFERENCIAKÖZLEMÉNYEK	19
FÜGGETLEN HIVATKOZÁSOK	21
IRODALOMJEGYZÉK	22

1. BEVEZETÉS

Az értekezésben néhány olyan peremértékfeladat numerikus és analitikus megoldásának meghatározását mutatom be, amelyek matematikai modelljei nem-newtoni folyadékok határréteg áramlását írják le különböző fizikai alkalmazásokban.

A folyadékmechanika alapjait Archimedes fektette le időszámításunk előtti 3. évszázadban. Őt követően időszámításunk szerinti 15. évszázadban Leonardo da Vinci, majd a 17. évszázadban Isaac Newton folytatta a folyadékok dinamikai és statikai tulajdonságainak kvantitatív vizsgálatát, aki kísérleti eredményeit a *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* című könyvének második kötetében foglalta össze. Ezen eredményekre alapozva végzett kutatásokat Daniel Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert és Leonard Euler a 18. században. A folyadékáramlás matematikai modellje az ún. Euler egyenlet, amely a nyomás és sebesség függvényében adja meg az áramlást. A 19. században Claude-Louis Navier és George Stokes írták fel viszkózus folyadék áramlásának matematikai modelljét nemlineáris parciális differenciálegyenletekkel, amelyekhez általános esetben nem adható meg analitikus megoldása. Ludwig Prandtl 1905-ben a Navier-Stokes egyenletekre egy egyszerűsítést javasolt az ún. határréteg egyenleteket, ezzel megalapozva a határréteg áramlás elméletét. Heinrich Blasius publikálta 1908-ban vízszintes síklap fölötti határréteg áramlás megoldását hasonlósági módszerrel [12]. A téma egyik legismertebb könyve newtoni folyadékokra a Hermann Schlichting által írt "Boundary-Layer Theory" c. könyv. Részletesebb történeti áttekintést Anderson [4] cikkében olvashatunk.

A 20. század elején megalapozott határréteg áramlás rövid idő alatt népszerűvé vált a kutatók körében, mivel a természetben számtalan áramlási jelenség figyelhető meg, melyek megértése kardinális jelentőségű a technikai előrehaladás tekintetében. Az úrkutatás, elektronika, telekommunikáció, szállítmányozás és egyéb területek fejlődése robbanászerű változást idézett elő az alapanyagok előállítási és felhasználási folyamatainak modernizációjában. Ennek köszönhetően az utóbbi két évtizedben jó néhány alapanyag került a felhasználók és kutatók érdeklődésének középpontjába, amelyek közül jelentősebbek a félvezető és optikai anyagok, bioanyagok, kerámiák, speciális polimerek és különleges ötvözetek. A kidolgozott új megközelítés célja az egyedi anyagtulajdonságok elérése, a termékek minőségének javítása a gyártási költségek csökkentése mellett. Napjainkban a speciális anyagok iránti kereslet növekedése szükségessé teszi az alapanyag előállítás és felhasználás folyamatos kutatását. Megannyi anyagfeldolgozási eljárás során figyelhető meg folyadékáramlás, amely kulcsfontosságú a végtermék minőségének és egyéb jellemzőinek meghatározásánál illetve az előállítási műveletek irányításának és optimalizálásának szempontjából. Más szóval a folyadékmechanika és azon belül a folyadékáramlás rendkívül fontos szerepet játszik az anyagfeldolgozási eljárások széles körében, úgy mint kristály képzés, öntés, fröccsöntés, hegesztés, forrasztás, műanyagok, élelmiszerek és egyéb polimer anyagok extrudálása, optikai szálak illetve kompozit anyagok gyártása. Kristályképzés során az olvadt anyagban kialakuló áramlás erősen hatással van a keletkező kristály minőségére, ezáltal a kristályból gyártott félvezető szerkezetére is kihat. Ezért szükséges az áramlási folyamat megértése és minél pontosabb feltérképezése, amely lehetőséget ad a nem kívánt hatások ellenőrzésére és kiküszöbölésére. Hasonlóképpen a felületi feszültség hatására alakul ki áramlás hegesztés és forrasztás során az olvadt fémekben, ahol a kötés kialakulását befolyásolja az áramlás. Míg optikai szál gyártásánál a keletkező szál profiljára az olvadt üveg viszkózus áramlása és a gravitáció van hatással.

Yogesh Jaluria [41] tanulmányában részletesen ismertet néhány ilyen folyamatot (optikai szál gyártása, kristályképzés félvezetők előállításához, öntés, vékony film gyártása,

polimerek készítése) és kiemeli a folyadékmechanika területén kifejlesztett technikák és eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát.

Kutatómunkám során az alábbi három lamináris áramlási jelenséghez tartozó matematikai modell vizsgálatát jelöltem meg célként:

Nem-newtoni áramlások:

Fontos szerepet játszanak azok a folyamatok, amelyekben a folyadék viszkozitása az áramlás nyírási sebességétől függ, különösen a műanyagok és egyéb polimer anyagok feldolgozása során (pl. az extrudálás vagy a fröccsöntés). A nem-newtoni viselkedés jelentősen nehezíti az áramlás leírását.

Felületi feszültség által indukált áramlás:

Hegesztés és forrasztás során az olvadt fém áramlását többnyire a felületi feszültség befolyásolja. Mikrogravitációs körülmények között (például űralkalmazásokban) különösen dominánsá válik a felületi feszültség olyan folyamatoknál, mint a kristály növekedés és szilárdulás, amikor a felhajtóerő csökken. Ezen körülmények között meghatározó az ún. Marangoni-hatás, amit a hőmérséklet és/vagy koncentráció változással járó felületi feszültség változás idéz elő.

Folyadékáramlás bevonó eljárásokban:

Korozív környezetben alkalmazott felületek ellenálló képességét bevonással növelik. Az optikai szálakat polimer bevonat erősíti. Az anyagok széles skáláját alkalmazzák bevonatok készítésére, a műanyagoktól a fémekig. A bevonat vastagságát és annak minőségét, különösen a benne maradt buborékokat és egyéb anyaghibákat a bevonatolás közben fellépő áramlás határozza meg. Elengedhetetlen a folyamatban résztvevő alapvető áramlási mechanizmusok megértése, amely lehetőséget ad a bevonat tulajdonságainak javítására. A feladat magában foglalja a bevonandó felszín mindkét oldalán végbemenő folyadékáramlást.

Az értekezés célja a fent említett áramlási jelenségekhez tartozó négy matematikai modell felírása és ezek megoldásainak vizsgálata. A határréteg áramlást, mint peremérték feladatot minden esetben parciális differenciálegyenlet-rendszerrel írjuk föl a hozzá tartozó peremfeltételekkel. Az egyenletrendszer hasonlósági transzformáció alkalmazásával visszavezetjük közönséges differenciálegyenlet-rendszerre, melynek keressük numerikus illetve analitikus megoldásait.

Az értekezés megírása során törekedtem a szakirodalomban használt jelölések megtartására, ezért fejezetenként elkészítettem a jelölések, illetve a görög szimbólumok listáját, ahol egyértelműen megjelöltem, hogy adott fejezetben az adott szimbólummal mit jelölünk.

Értekezésem második fejezetében szállítószalagon történő ömlesztett anyagok szállítását elemzem. Ebben az esetben az ömlesztett anyagok vízszintes, lejtő- vagy emelkedőirányban történő szállításakor az anyagban kialakuló sebességeloszlását vizsgálják (l. Benedetto, Caglioti és Pulvirenti 1999 [10], Ancey 2003 [3]). A folyamatot határréteg áramlással modellezem nem-newtoni közegre. A folytonossági és a mozgásegyenletekhez peremfeltételek járulnak a mozgó sík mentén, illetve a szállított anyag felületén. A sebességeloszlást különböző mért anyagjellemzők, szállítószalag sebességek és lejtőszögek esetén vizsgálom.

A harmadik fejezetben az ún. Marangoni-hatás matematikai modelljét vizsgálom, ahol a határréteg áramlást a folyadék felületén kialakuló feszültség változás idézi elő (pl. Napolitano 1979 [52], Arafune és Hirata 1998 [5], Christopher és Wang 2001[26]). Ennek jelentős szerepe van különböző gyakorlati feladatok során, mint például a kenésméletben, a bevonatok készítésében és a habok száradásában. A felírt modell egy csatolt parciális differenciálegyenlet-rendszer. Az egyenletek és a hozzájuk járó peremfeltételek anyagjellemző paramétereket is tartalmaznak. Vizsgálataim során a felírt parciális differenciálegyenlet-rendszert alkalmasan megválasztott hasonlósági transzformációval

visszavezetem közönséges differenciálegyenlet-rendszerré. A peremfeltételek megfelelő átalakítása után a feladathoz exponenciális sor alakú megoldást állítok elő és vizsgálom azoknak a paramétereiktől való függését.

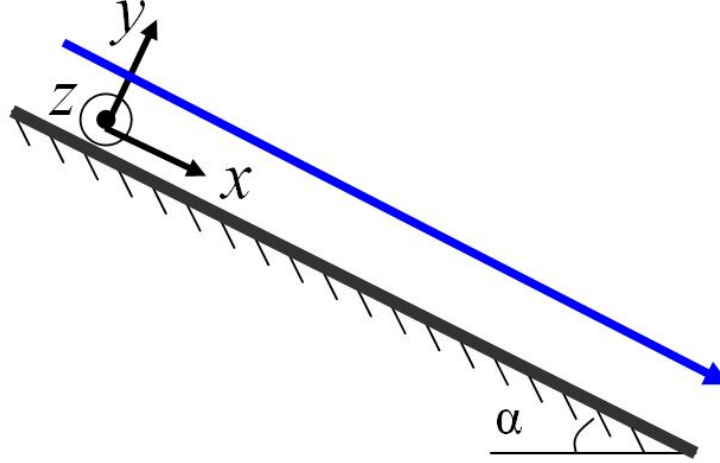
A negyedik fejezetben vízszintes síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlás modelljével foglalkozom nem-newtoni közegekre. Napjainkban számos dolgozat jelent meg newtoni folyadékok síklap fölötti hidrodinamikai és termodinamikai határrétegeiben létrejövő áramlási jellemzők matematikai vizsgálatáról konvektív peremfeltételek alkalmazásával, amikor a síklapot aluról, konvektív módon melegítik forró folyadékkal (lásd pl. Aziz 2009 [7], Ishak 2010 [40], Magyarai 2011 [49]). A modell alkalmazható az iparban gyártási folyamatok leírására, mint pl. a polimer lemeztáblák és fóliák előállítására, papírgyártásra, üvegfűtésre, műanyagok extrudálására. Vizsgálataim nem-newtoni közegbe helyezett áteresztő és nem áteresztő síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlás vizsgálatára irányulnak, azaz arra, hogy hogyan hatnak az anyagi és áramlástan paraméterek a hőmérséklet és a sebesség változásának alakulására.

Az értekezés ötödik fejezetében porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló konvektív áramlást tanulmányozom. A függőleges síklap körüli konvekciót az 1970-es években kezdték vizsgálni (Cheng és Minkowycz 1977 [22]). Telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap körüli szabad konvektív áramlás alkalmazható például néhány geofizikai és mérnöki probléma leírására. Furumoto 1975-ben megjelent tanulmányában azt írja le, hogy a vulkanikus régióban kialakított hóhidak segítségével a felszín alatti vizek fűthetőek, melyeket megcsapolással energiatermelésre használhatunk [31]. További gyakorlati alkalmazásokként megemlíthető az energiahatékony épületek és épületelemek tervezése, a kompakt hőcserélők, napkollektorok és az élelmiszeripari alkalmazások. A vizsgált modellekben a sűrűség és a hőmérsékletváltozás között lineáris viszonyt alkalmaznak, amit a síklap és azt körülvevő folyadék közötti kis hőmérsékletkülönbség indokol (Vajravelu és Sastri 1977 [61], Nazar, Arifin és Pop 2006 [53]). Abban az esetben, ha a folyamat nagy hőmérsékletkülönbség mellett megy végbe, akkor a sűrűség és hőmérséklet kapcsolata másodfokú összefüggéssel írható le (Vajravelu és Sastri 1977 [61]). Vizsgálataim célja konvektív áramlás elemzése hasonlósági transzformáció alkalmazásával kis és nagy hőmérsékletkülönbség esetén és előállítom a feladatok numerikus és analitikus megoldását.

2. A DISSZERTÁCIÓ RÖVID ÁTTEKINTÉSE

2.1. ÁRAMLÁS LEJTŐN

Modellünkben feltesszük, hogy a szállítás állandó hőmérsékleten és állandó nyomáson történik, így a γ és n értéke csak az anyag fajtájától fog függeni.



2.1. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

Az ömlesztett anyagban kialakuló áramlást az alábbi alapegyenletekkel adjuk meg:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

kontinuitási egyenlet és a Navier-Stokes egyenletből származtatott

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g \sin(\alpha), \quad (2.2)$$

mozgásegyenlet abban az esetben, ha nincs nyomásváltozás a folyamatban, az egyenletekben az x és y a szállítószalag síkjával párhuzamos és az arra merőleges koordinátákat jelölik, u és v az x és y koordinátákhoz tartozó sebesség komponensek, ρ a szállított anyag sűrűségét jelöli, g a gravitációs gyorsulás, τ_{xy} pedig a feszültség tenzor megfelelő eleme, melyet a szállított anyagokra a hatványfüggvény törvény alkalmazásával a

$$\tau_{xy} = \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.3)$$

alakban írunk fel, amelyben γ és n anyagjellemző konstansok. Az n kitevő értéke lehet egynél kisebb szám, pl. agyagmassza esetén $n \approx 0,3$ [42], lehet egynél nagyobb érték például homok zagy [S3], vagy száraz granulátum esetén ez 2 körüli szám. A feladathoz járuló permfeltételek U konstans sebességgel lefelé mozgó szállítószalag esetén:

$$u|_{y=0} = U, v|_{y=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = 0. \quad (2.4)$$

A feltételben szereplő h az áramló réteg magasságát jelöli.

A sebességeloszlás az áramló közegben Newtoni folyadék esetén:

$$u(y) = \frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + U. \quad (2.5)$$

Sebességeloszlás nem-newtoni közeg áramlása esetén:

$$u(y) = U + \left(\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(h^{\frac{1+n}{n}} - (h-y)^{\frac{1+n}{n}} \right). \quad (2.6)$$

Az egyenletekben szereplő n , γ , α és c paraméterek sebességeloszlásra gyakorolt hatását vizsgáltam, melynek eredményeit az I. tézisemben foglaltam össze.

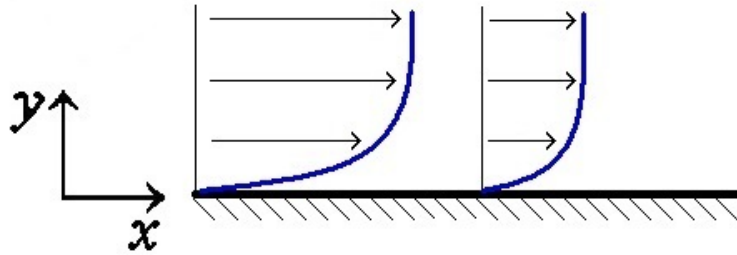
2.1.1. I. TÉZIS

Meghatároztam egy α dőlésszögű szállítószalagon lefelé történő, nem-newtoni folyadékként modellezett, ömlesztett anyag állandósult szállítása során a szállítószalag felületén az áramló közegben az anyag sebességének eloszlását. Numerikus számítások alapján megállapítottam, hogy az n hatványkitevő, a c koncentráció, illetve a γ anyagjellemző paraméter növelése csökkenti a mozgó felület feletti rétegben a sebesség nagyságát, míg az α dőlésszög növelése sebességnövekedést okoz.

Tézishez tartozó publikációim: [S1], [S3], [S10], [S11]

2.2. MARANGONI-HATÁS VIZSGÁLATA

Azt a jelenséget, amikor egy folyadék felületén a hőmérséklet és/vagy koncentráció gradiens változásából származó felületi feszültség változás a folyadékban mozgást hoz létre Marangoni konvekciónak nevezik. Ez számos mérnöki probléma esetén megjelenik pl. gőz buborékok körüli nukleáció és gőz buborékok növekedése során a felületi feszültség változása miatt, amelyet a hőmérséklet és/vagy koncentráció változások okoznak a buborékok felületén [26]. A természetes konvekció kísérleti és numerikus vizsgálata is azt mutatják, hogy a hőátadás jelentős lehet a Marangoni áramlás miatt mikrogravitációban, de még a Föld gravitációjában is [27].



2.2. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

Kétdimenziós, sűrűdásos, összenyomhatatlan, newtoni folyadék stacionárius lamináris áramlását vizsgáljuk síklapon. Legyen $x \geq 0$ a sík irányába és $y \geq 0$ a síkra merőleges

koordináta az $y = 0$ sík egyenlettel. A síklapot az $x = y = 0$ pontba helyezzük. A határréteg áramlást leíró folytonossági, mozgás- és energiaegyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = K \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.8)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_f \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2.9)$$

ahol u és v az x illetve y irányú sebességkomponensek a sík lap mentén, T a hőmérséklet, α_f jelöli a hődiffúziót és $K = \mu/\rho$ a környező folyadék kinematikai viszkozitása, melyet modellünkben konstans értéknek feltételezünk.

A Marangoni-hatás a hőmérsékletmező és a sebességmező közti összefüggéssel jellemezhető [27], [59]. A peremfeltételeket az $y = 0$ felületen és $y \rightarrow \infty$ esetén az alábbiak szerint vesszük figyelembe:

az $y = 0$ síkban:

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = -\sigma_T \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=0}, \quad (2.10)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (2.11)$$

$$T(x, 0) = T(0, 0) + Ax^{m+1} \quad (2.12)$$

a felülettől távol $y \rightarrow \infty$

$$u(x, \infty) = 0, \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=\infty} = 0 \quad (2.14)$$

ahol $\sigma_T = d\sigma/dT$ (ahol $\sigma(T) = \sigma_T T + C$, C =állandó), A a hőmérsékletgradiens együtthatója, m a hatványkitevőben szereplő paraméter. Az m kitevő lineáris közelítés esetén 0, míg négyzetes közelítés esetén 1 értéket vesz fel. Az m paraméter legkisebb értéke -1 , amely azt az esetet jelöli, ahol már a felület mentén nincs hőmérséklet változás és ezért a Marangoni-hatás nem alakul ki.

Az áramfüggvény bevezetésével és alkalmasan megválasztott hasonlósági transzformációval visszavezettük a parciális differenciálegyenlet-rendszert az alábbi közöséges differenciálegyenletekre és a hozzájuk tartozó peremfeltételekre:

$$f''' - \frac{2m+1}{3} f'^2 + \frac{m+2}{3} f f'' = 0. \quad (2.15)$$

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'(\infty) = 0 \quad (2.16)$$

$$(m+1)f'\Theta - \frac{m+2}{3} f \Theta' = \frac{1}{\text{Pr}} \Theta'', \quad (2.17)$$

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta'(\infty) = 0, \quad (2.18)$$

ahol $\text{Pr} = \mu/(\rho\alpha_f)$ jelöli az ún. Prandtl-számot.

Meghatároztam egy közelítő exponenciális sor alakú megoldását a (2.15)-(2.16) és (2.17)-(2.18) nemlineáris peremérték feladatoknak különböző m hatványkitevő és Prandtl-szám értékek mellett. Elért eredményeimet a II. tézisben foglaltam össze.

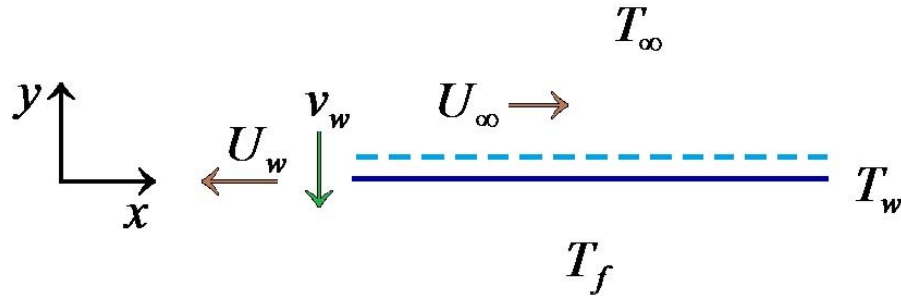
2.2.1. II. TÉZIS

Előállítottam newtoni folyadékban a felületi feszültség által indukált áramlás, az ún. Marangoni-jelenség megoldását exponenciális sor alakjában, illetve eljárást adtam meg az exponenciális sorban szereplő együtthatók meghatározására. Numerikus számítások alapján megállapítottam, hogy az m hatványkitevő növelése csökkenti a határrétegben kialakuló sebesség nagyságát, továbbá az m hatványkitevő vagy a Pr Prandtl-szám növelése a határréteg vastagságát növeli. Kis Prandtl-számok ($Pr < 2,5$) esetén a határrétegbeli hőmérséklet értékek csökkennek Pr növelésével, míg nagy Prandtl-számok ($Pr > 2,5$) esetén a Pr növekedésének hatása ellentétes.

Tézishez tartozó publikációim: [S4], [S7], [S8], [S9]

2.3. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS MOZGÓ, ÁTERESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT

Összenyomhatatlan, ρ sűrűségű és T_∞ hőmérsékletű viszkózus folyadék állandósult, két-dimenziós lamináris áramlását vizsgáljuk vízszintes síklap fölött. Továbbá feltesszük, hogy a nem-newtoni közeg U_∞ állandó sebességgel áramlik a mozgó, áteresztő síklap fölött, melyet aluról konvektív módon melegítünk forró folyadékkal. A síklapot az $y = 0$ síkba helyezzük el.



2.3. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

Ezen feltételezéseket figyelembe véve, továbbá a nyomást és a testre ható egyéb erőket elhanyagolva a határréteg áramlást leíró folytonossági, mozgás- és energiaegyenletek a következő alakban írhatók fel [68]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.19)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.20)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_t \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2.21)$$

ahol az u , v az x és y koordinátáknak megfelelő sebesség komponensek, T a határrétegbeli folyadék hőmérséklete. Továbbá alkalmazva a nyíró feszültség és nyíró sebesség közötti hatványtörvény szerinti összefüggést $\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}$, ahol K a nem-newtoni közeg konzisztencia indexe, α_t a hődiffúzió és $\gamma = \frac{K}{\rho}$ a kinematikai viszkozitás.

Itt n a hatványfüggvény pozitív kitevője, amely alapján megkülönböztetünk pszeudoplasztikus ($n < 1$), newtoni ($n = 1$) és dilatáló ($n > 1$) folyadékot.

A fent említett fizikai jelenség leírásához az alábbi peremfeltételeket alkalmazzuk. A síklap felületén ($y = 0$): (mozgó, áteresztő síklapot feltételezve és konvektív hőátadás esetén)

$$u(x, 0) = -U_w, \quad (2.22)$$

$$v(x, 0) = v_w(x), \quad (2.23)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_f (T_f - T_w), \quad (2.24)$$

ahol U_w a mozgó síklap sebessége, $v_w(x)$ a síklap áteresztő képessége, h_f a hőátadási együttható és k a hővezetési tényező.

Távol a síklaptól ($y \rightarrow \infty$):

$$u(x, \infty) = U_\infty, \quad (2.25)$$

$$T(x, \infty) = T_\infty. \quad (2.26)$$

Ha T_w jelöli a síklap hőmérsékletét, akkor fönn áll az alábbi reláció a hőmérsékletek között: $T_f > T_w > T_\infty$.

Az áramfüggvény bevezetésével és alkalmasan megválasztott hasonlósági traszformációval visszavezettük a parciális differenciálegyenlet-rendszert közös differenciálegyenlet-rendszerre a hozzátartozó peremfeltételekkel.

$$\left(|f''|^{n-1} f'' \right)' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0, \quad (2.27)$$

$$f(0) = f_w, \quad f'(0) = -\lambda, \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (2.28)$$

$$\left(|f''(\eta)|^{n-1} \Theta'(\eta) \right)' + \frac{\text{Pr}}{n+1} f(\eta) \Theta'(\eta) = 0, \quad (2.29)$$

$$\Theta'(0) = -\bar{a}(1 - \Theta(0)), \quad \Theta(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0, \quad (2.30)$$

ahol f_w az áteresztő képesség arányszáma, $\lambda = U_w/U_\infty$ a sebességarány és $\bar{a} = \frac{c}{k} \left(\frac{\gamma}{U_\infty^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ hővezetéssel arányos tényező.

MAPLE 12 szoftvert használtunk a közönséges differenciálegyenlet-rendszer numerikus közelítő megoldásainak előállítására. A szoftverrel a Runge-Kutta-Felhberg módszert alkalmazva oldottuk meg a peremérték feladatot.

Vizsgálataim eredményeit a III. tézisben foglaltam össze.

2.3.1. III. TÉZIS

A mozgó, áteresztő síklap fölötti határréteg áramlás matematikai modelljének hasonlósági megoldásait adtam meg numerikusan. Az elvégzett számítások alapján megállapítottam, hogy az n hatványkitevő növelése csökkenti a határrétegben kialakuló sebesség nagyságát, az n hatványkitevő, a Pr Prandtl-szám, az f_w áteresztő képesség és a λ sebességarány értékeinek növelése mellett a határrétegbeli hőmérséklet nagysága és a termikus határréteg vastagsága csökken. Az \bar{a} hőátadással arányos paraméter növelése a mozgó síklap menti hőmérsékletet növeli, de a termikus határréteg vastagságát nem változtatja.

Tézishez tartozó publikációim: [S2], [S12], [S13], [S14], [S15], [S20]

2.4. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS PORÓZUS KÖZEGBE HELYEZETT FÜGGŐLEGES SÍKLAP MENTÉN

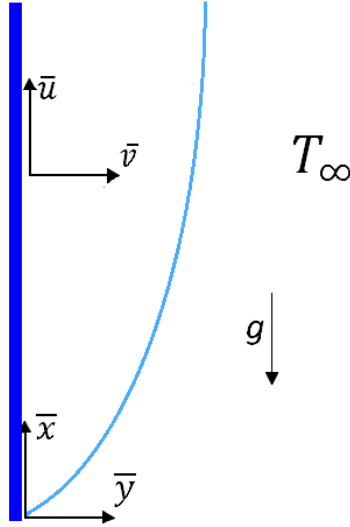
Tekintsünk egy porózus közegbe helyezett függőleges síklapot (??). Vizsgáljuk a T_∞ hőmérsékletű folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló szabad konvektív áramlást. A mozgási és termikus határrétegeket vizsgáljuk a síklap mentén. Az \bar{x} a síklappal párhuzamos, az \bar{y} pedig az arra merőleges dimenzióval rendelkező koordináta. Az \bar{x} és \bar{y} irányoknak megfelelő sebességkoordinátákat az $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$ és $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y})$ jelöli.

A szakirodalom alapján a határréteg egyenletek felírásakor az alábbi feltételeket tesszük [45], [62]:

- (i) A konvektív folyadék és a porózus közeg termodinamikai egyensúlyban van;
- (ii) a folyadék hőmérséklete forráspont alatti;
- (iii) a konvektív áramlást a közeg két határa közötti sűrűség különbség indukálja;
- (iv) a folyadék viszkozitása, hővezetése, illetve a porózus közeg áteresztő képessége állandó.

Ha az áramlás állandósult és a folyadék sűrűsége konstans, akkor a közeg összenyomhatatlanságát az alábbi folytonossági egyenlettel írjuk föl:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (2.31)$$



2.4. ábra. Az áramlás fizikai modellje

Porózus közegben történő áramlás esetén a Naviere-Stokes-egyenletet a Darcy-törvénnyel helyettesítjük. Állandó sűrűséget feltételezünk a közegben, kivéve a síklap mentén. A függőleges síklap és a porózus közeg közötti kis hőmérséklet változás esetén a folyadék sűrűsége a felhajtóerő, a tehetetlenség illetve a viszkozitás figyelembevételével a Boussinesq-féle közelítést alkalmazva adható meg:

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta_1 (T - T_\infty)], \quad (2.32)$$

ahol ρ a folyadék sűrűsége, T a folyadék hőmérséklete, ρ_∞ jelöli a környező folyadék sűrűségét, melynek hőmérséklete T_∞ és β_1 a hőtágulási együtthatója.

Amikor a síklap és a környező folyadék között viszonylag nagy a hőmérséklet különbség, akkor a sűrűség leírására nemlineáris közelítést szoktak alkalmazni (see [22], [62], [63]):

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta_2 (T - T_\infty)^2], \quad (2.33)$$

itt β_2 a másodfokú közelítés hőtágulási együtthatója. Az (2.32) és (2.33) lineáris és kvadratikus hőmérséklet változással jellemzett sűrűségi egyenletekhez a Darcy törvény alapján [63] az alábbi mozgás egyenlet járul:

$$\bar{u} = \frac{gK\beta_\delta}{\nu} (T - T_\infty)^\delta, \quad (2.34)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás, K a porózus közeg áteresztő képessége, ν jelöli a kinematikus viszkozitást, továbbá a $\delta = 1$ esethez a lineáris hőmérséklet függés tartozik az (2.32) egyenlettel, míg a $\delta = 2$ a kvadratikus közelítés esete az (2.33) egyenlettel.

Az energiamegmaradást az alábbi egyenlettel fejezzük ki:

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2.35)$$

itt α_m a folyadékkal telített porózus közeg hőmérséklet-vezetési együtthatója.

Dimenziómentesítés után az alábbi csatolt parciális differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatát vizsgáljuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.36)$$

$$u = \theta^\delta, \quad (2.37)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (2.38)$$

A peremfeltételek a síklap mentén ($y = 0$)

$$v(x, 0) = 0, \quad (2.39)$$

$$A(x)(T_r - T_\infty)\theta(x, 0) - B(x)(T_r - T_\infty) \frac{Ra^{1/2}}{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = C(x), \quad (2.40)$$

ahol A, B, C az x függvényei.

A felülettől távol ($y \rightarrow \infty$)

$$\theta(x, y) \rightarrow 0. \quad (2.41)$$

Alkalmasan megválasztott hasonlósági transzformációval visszavezetjük a feladatot közönséges differenciálegyenlet-rendszerek peremérték feladatára.

Lineáris hőmérséklet-sűrűség összefüggés esetén a megoldandó peremérték feladat:

$$f' = h \quad (2.42)$$

$$h'' - (1 + 2n)f'h + (1 + n)fh' = 0 \quad (2.43)$$

$$f(0) = 0, \quad (1 - \epsilon)h(0) - \epsilon h'(0) = 1, \quad h(\eta) \rightarrow 0. \quad (2.44)$$

Másodrendű hőmérséklet-sűrűség függés esetén:

$$f' = h^2, \tag{2.45}$$

$$h'' - \frac{1+2m}{2}f'h + (1+m)fh' = 0 \tag{2.46}$$

$$f(0) = 0, \quad (1-\epsilon)h(0) - \epsilon h'(0) = 1, \quad h(\eta) \rightarrow 0. \tag{2.47}$$

A feladatokhoz numerikus közelítő megoldásokat állítottunk elő MAPLE 12 szoftver felhasználásával. A közelítő megoldásokat a dsolve beépített peremérték feladat megoldó alkalmazásával határoztuk meg. Számításaim eredményeit a IV. tézisben foglaltam össze.

2.4.1. IV. TÉZIS

A folyadékkal telített porózus közegben elhelyezett függőleges síklap mentén kialakuló határréteg áramlás matematikai modelljéhez megadtam a hasonlósági megoldásokat lineáris és másodfokú sűrűség-hőmérséklet összefüggés esetén numerikusan és speciális esetben analitikusan. A numerikus megoldások előállítását követően megállapítottam, hogy mindhárom esetben ($\epsilon = 0$, $\epsilon = 1$ és $\epsilon \rightarrow \infty$) az n és m hatványkitevők növelése a határrétegben a sebesség és hőmérséklet értékek csökkenését eredményezi.

Tézishez tartozó publikációim: [S5], [S6], [S16], [S17], [S18], [S20]

3. ÖSSZEFOGLALÁS

3.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TERVEZETT KUTATÁSI IRÁNYOK

Az értekezésben négy, a műszaki gyakorlatban előforduló peremértékfeladat numerikus és analitikus megoldásának meghatározását mutattam be, amelyek matematikai modelljei newtoni és nem-newtoni folyadékok síklap menti határréteg áramlását írják le.

Elsőként α dőlésszögű szállítószalagon ömlesztett anyag szállítása során kialakuló határréteg áramlást vizsgáltunk. Az ömlesztett anyagot nem-newtoni folyadékként modelleztük, a jelenségre folyadékáramlási feladatot írtunk föl. Következő fejezetben a hegesztés illetve forrasztás során megfigyelhető ún. Marangoni-hatás leírásával foglalkoztunk. A felületi feszültség által indukált áramlást parciális differenciálegyenlet-rendszerrel adjuk meg, melynek meghatároztuk egy exponenciális sor alakú megoldását. Harmadikként fóliák és lemeztáblák gyártásánál előforduló mozgó, áteresztő síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlást tanulmányoztunk. A folyamatot leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatát vizsgáltuk. Végül folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló határréteg áramlás matematikai leírását adtuk meg. Ez a modell a műszaki gyakorlatban hőcserélők illetve energiahatékony épületek tervezésénél használható.

Az értekezésben nem-newtoni és newtoni folyadékok áramlását leíró parciális differenciálegyenlet-rendszerek peremérték feladatait vizsgáltuk. A vizsgálatok során hasonlósági változót és hasonlósági függvényeket vezettünk be. A hasonlósági módszer alkalmazásával a parciális differenciálegyenlet-rendszereket visszavezettük közönséges differenciálegyenlet-rendszerekre, amelyek megoldásait vizsgáltuk, illetve a feladatokban szereplő paramétereknek a megoldásokra gyakorolt hatását. A numerikus megoldásokat MAPLE 12 programban készítettük el, néhány programkódot a mellékletekben ismertetünk.

Jövőbeli kutatási irányok között elsődleges az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazása lehet. Konkrét fizikai jelenségek, kísérleti mérések elvégzése a matematikai modellek megoldásainak validálására. Illetve olyan ipari feladatok feltérképezése, ahol az alap modellek alkalmazhatóak és továbbfejleszthetőek gyártási, fejlesztési vagy akár optimalizálási eljárások során.

4. SUMMARY

4.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS

In this PhD dissertation I presented the numerical and the analytical solutions to four boundary value problems, which occur in every day technical practices. The considered mathematical models describe boundary layer flows of Newtonian and non-Newtonian fluids along flat plate.

Firstly the boundary layer flow was investigated in bulk materials during the transportation on the conveyor belt, which has an α angle of inclination. The bulk material was modelled as non-Newtonian fluid and we examined this fluid flow phenomenon. In the next section, the so-called Marangoni effect was described, which occurs during welding or soldering processes. This flow was induced by surface tension and was described by a system of partial differential equations. The solution of the system was determined in the form of power series. After that a convective boundary layer flow model was studied, which occurs in the manufacturing processes of films and sheets produced over a moving and permeable flat plate. We investigated the boundary value problem of the system of partial differential equations. Finally, we considered the boundary layer flow along a vertical flat plate in fluid saturated porous medium. This model can be used in the technical practice to design heat exchange and energy efficient building elements.

In the dissertation, the flows of non-Newtonian and Newtonian fluids were described by boundary value problems of a system of partial differential equations. Similarity variables and similarity functions were introduced in order to reduce the system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations. We have solved these boundary value problems by using the symbolic algebra software Maple 12. Some program codes are presented in the appendix.

In my future research I would like to apply the obtained theoretical results in to practice. Specific physical phenomena and experimental measurements will be performed to validate the solutions of the mathematical models. In addition, I intend to find out how my models can be applied in industrial applications and then how they can be improved for manufacturing, development and optimization.

4.2. THESES

I. THESIS

I have determined the velocity profiles in the bulk materials modelled as non-Newtonian fluid, during steady transportation on the conveyor belt with an α angle inclination. Based on the numerical calculations, I found that increasing the exponent n , the concentration c and the material characteristic parameter γ leads to a decrease in the value of the velocity in the layer above the moving surface, while this value increases if the angle of inclination α increases.

My publications concerning this thesis: [S1], [S3], [S10], [S11]

II. THESIS

I have calculated the solution of surface tension induced flow the so-called Marangoni effect of the Newtonian fluid in a power series form. I gave a method to determine the coefficients of the power series. Based on numerical calculations, I observed that the values of velocity decrease in the boundary layer as the power exponent m increases, moreover the boundary layer thickness increases as m or the Prandtl number Pr increases. For low Prandtl numbers ($Pr < 2,5$), the values of the temperature decrease as Pr increases and for high Prandtl numbers ($Pr > 2,5$), the influence of Pr is opposite.

My publications concerning this thesis: [S4], [S7], [S8], [S9]

III. THESIS

I have determined the similarity solutions to the mathematical model of the boundary layer flows over a moving permeable flat plate numerically. Based on the numerical calculations, I found that the increase of the power exponent n leads to a decrease in the value of the velocity in boundary layer. Moreover, increasing exponent n , Prandtl number Pr , permeability f_w and velocity ratio λ leads to a decrease in the temperature in the thermal boundary layer and the value of the boundary layer thickness. The plate surface temperature increases as the heat transfer parameter \bar{a} increases and the thermal boundary layer thickness does not change.

My publications concerning this thesis: [S2], [S12], [S13], [S14], [S15], [S20]

IV. THESIS

I have calculated the similarity solutions to the boundary layer flow along a vertical flat plate placed in fluid saturated porous medium in linear and quadratic density-temperature variation cases numerically and in one case analytically. Based on the numerical calculations, I found that in all three cases ($\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ and $\varepsilon \rightarrow \infty$) the increase of the power exponent n or m leads to a decrease in the values of the velocity and the temperature in the boundary layer.

My publications concerning this thesis: [S5], [S6], [S16], [S17], [S18], [S20]

AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN KÉSZÍTETT SAJÁT PUBLIKÁCIÓK

Folyóiratcikkek

- [S1] Vadászné dr. Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás lejtőn, Miskolci Egyetem Közleményei, Multidiszciplináris tudományok, 1. kötet (2011) 1. szám, pp. 111-118., ISSN 2062-9737
- [S2] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Similarity Solution to a Thermal Boundary Layer Model of a non-Newtonian Fluid with a Convective Surface Boundary Condition, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 8, No. 6, 2011, pp. 131-140., ISSN 1785-8860, IF 0.385
- [S3] Gabriella Bognár, Imre Gombkötő, Krisztián Hriczó: Power-law Non-Newtonian Fluid Flow on an Inclined Plane, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 6, No. 1, 2012. pp. 72-80., ISSN 1998-0140
- [S4] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Series Solutions for Marangoni Convection on a Vertical Surface, Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2012, Article ID 314989, 18 pages, doi:10.1155/2012/314989, IF 1.383
- [S5] Krisztián Hriczó, Gabriella Bognár: Numerical Analysis of Free Convection from a Vertical Surface Embedded in a Porous Medium, Topics in Intelligent Engineering and Informatics, Applied Information Science, Engineering and Technology, Springer, Vol. 7. 2014. pp 81-102. doi:10.1007/978-3-319-01919-2_6
- [S6] Vadászné Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Porózus közegbe helyezett függőleges síklapon konvektív határréteg áramlás vizsgálata, ME Közleményei, Multidiszciplináris Tudományok, 3. kötet, (2013) 1. sz. pp 195-202. HU ISSN 2062-9737

Konferenciaközlemények

- [S7] Hriczó Krisztián: A Marangoni effektus vizsgálata nemnewtoni közegekre, Doktoranduszok Fóruma 2010, Miskolc, 2010. november 10. Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa, Miskolci Egyetem Innovációs és Technológia Transzfer Centrum, pp. 68-73.
- [S8] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: On the investigation of Marangoni effect for Newtonian Fluids, XXV. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 31 March-1 April 2011, pp. 7-12. Section F: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-661-959-6
- [S9] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: A Marangoni hatás vizsgálata hasonlósági megoldásokkal, OGÉT 2011, 19th International Conference on Mechanical Engineering, Sumuleu-Ciuc, April 28 - May 1, 2011 pp. 61-64., ISSN 2068-1267
- [S10] Vadászné dr. Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás ferde szállítószalagon, Műszaki Tudományok az Észak-Kelet Magyarországi régióban 2011. május 18., pp. 357-364, ISBN 978-963-7064-25-8
- [S11] Bognár, G., Hriczó K., Gombkötő I.: Non-Newtonian fluid flow down an inclined plane, Proc. of the 9th ASME/WSEAS International Conference on Fluid Mechanics & Aerodynamics, Florence, Italy, August 23-25, 2011. pp. 129-134., ISBN: 987-1-61804-026-8
- [S12] Hriczó Krisztián: Nemnewtoni folyadékok határréteg áramlásának hasonlósági megoldásai konvektív felületi peremfeltételek mellett, Doktoranduszok Fóruma 2011, Miskolc, 2011. november 08. Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa, Miskolci Egyetem Tudományszervezési és Nemzetközi Osztály, pp. 60-65.
- [S13] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition, in Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. pp. 198-203., ISBN:978-1-61804-065-7
- [S14] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó, Zoltán Csáti: Laminar thermal boundary layer of a power-law fluid over a flat plate with a convective surface boundary condition, XXVI. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 29-30 March 2012, E11, Section E: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-661-773-8, 6 pages
- [S15] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Termikus határréteg áramlás vizsgálata hatványközegekre, OGÉT 2012, 20th International Conference on Mechanical Engineering, Cluj-Napoca, April 19 - 22, 2012 pp. 80-83., ISSN 2068-1267
- [S16] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó, Zoltán Csáti: Investigation of the boundary layer over a vertical plate embedded in porous medium, XXVII. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 21-22 March 2013, E5, Section E: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-358-018-9, 6 pages

- [S17] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás numerikus vizsgálata porózus közegben, OGÉT 2013, 21st International Conference on Mechanical Engineering, Arad, April 25 - 28, 2013 pp. 71-74., ISSN 2068-1267
- [S18] Hriczó Krisztián: Termikus határréteg áramlás vizsgálata folyadékkal telített porózus közegben, Tavaszi Szél 2013., Budapest, pp. 184-190., ISBN 978-963-89560-2-6
- [S19] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Forced convection flow of a non-Newtonian fluid over a flat surface in porous medium, Mathematics and Computers in Biology & Biomedical Informatics: Proceedings of the 14th International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC '13), Baltimore, USA, September 17-19, 2013. pp. 86-91., ISBN:978-960-474-333-9
- [S20] Hriczó Krisztián: Folyadékáramlási problémák vizsgálata hasonlósági módszerrel nem-newtoni közegben, XIX. FMTÜ, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2014. pp. 209-212, ISSN 2067-6808

Független hivatkozások

- [S2] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Similarity Solution to a Thermal Boundary Layer Model of a non-Newtonian Fluid with a Convective Surface Boundary Condition, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 8, No. 6, 2011, pp. 131-140., ISSN 1785-8860, IF 0.385
- [S2-1] Mutlag A.A., Uddin M.J., Ismail A.I.M.: Effect of Thermal Slip on the Falkner-Skan Stretching and Shrinking Wedge Flow of a Power-Law Fluid and Heat Transfer, *Modern Applied Science* **7** 2013. pp. 57-69.
- [S2-2] Grosan T., Merkin J.H., Pop I.: Mixed convection boundary-layer flow on a horizontal flat surface with a convective boundary condition, *MECCANICA* **48**: (29) 2013. pp. 2149-2158.
- [S3] Gabriella Bognár, Imre Gombkötő, Krisztián Hriczó: Power-law Non-Newtonian Fluid Flow on an Inclined Plane, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 6, No. 1, 2012. pp. 72-80., ISSN 1998-0140
- [S3-1] Abas S.S., Mohd Yatim Y.: Similarity solution for unsteady gravity-driven dry patch in a non-Newtonian fluid flow, *AIP Conference Proceedings 20th National Symposium on Mathematical Sciences - Research in Mathematical Scienc.* American Institute of Physics Inc., 2013. pp. 487-495., doi:10.1063/1.4801166
- [S13] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition, in *Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology*, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. pp. 198-203., ISBN:978-1-61804-065-7
- [S13-1] Siddiqui A.M., Mitkova M.K., Ansari A.R.: Two-phase Flow of a Third Grade Fluid Between Parallel Plates, *WSEAS TRANS FLUID MECH* **7**: (4) 2012. pp. 117-128.

Irodalomjegyzék

- [1] Ahmad F., Al-Barakati W.H.: *An approximate analytic solution of the Blasius problem*, Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul., **14** 2009. pp. 1021-1024.
- [2] Allen M.B., Behic G.A., Trangenstein J.A.: *Multiphase Flow in Porous Media*, Lecture Notes in Engineering, Springer, New York, 1988.
- [3] Ancey C.: *Flow down inclined channel as a discriminating experiment*, Research Report 2003.
- [4] Anderson J.D.: *Ludwig Prandtl's Boundary Layer*, Physics Today Online **58** 2005. pp. 42-48. doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.2169443>
- [5] Arafune K., Hirata A.: *Interactive solutal and thermal Marangoni convection in a rectangular open boat*, Numerical Heat Transfer Part A **34** 1998. pp. 421-429.
- [6] Arifin N. M., Nazar R., Pop I.: *Marangoni-driven boundary layer flow in nanofluids*, Latest Trends on Theoretical and Applied Mechanics, Fluid Mechanics and Heat & Mass Transfer, Corfu Island, Greece, July 22-24. 2010. pp. 32-35.
- [7] Aziz A.: *A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **14** 2009. pp. 1064-1068.
- [8] Barrow H., Rao T.L.S.: *The effect of variable beta on free convection*. Br. Chem. Eng. **16** 1971. pp. 704-709.
- [9] Bataller R.C.: *Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition*, Appl. Math. Comput., **206** 2008. pp. 832-840.
- [10] Benedetto D., Caglioti E., Pulvirenti M.: *A kinetic equation for granular media*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **31**, 5(1997), 615-641. Erratum in M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33**, 2. 1999. pp. 439-441.
- [11] Benedetto D., Pulvirenti M.: *On the one-dimensional Boltzman equation for granular flows*, Phys. Fluids **16**, 12. 2004. pp. 4235-4247.
- [12] Blasius H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Z. Math. Phys., **56** 1908. pp. 1-37.
- [13] Bobylev A.V., Cercignani C., Toscani G.: *Proof of an asymptotic property of self-similar solutions of the Boltzman equation for granular materials*, J. Statist. Phys. **111**, 1-2. 2003. pp. 403-417.
- [14] Bognár G.: *Analytic solutions to the boundary layer problem over a stretching wall*, Computers and Mathematics with Applications **61** 2011. pp. 2256-2261.
- [15] Bognár G.: *On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids*, IMA J. Applied Mathematics **77** No. 4 2012. pp. 546-562.
- [16] Bognár G.: *Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile*, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics **6** 2011. pp. 22-31.

- [17] Bognár G., Z. Csáti: *Numerical solution to boundary layer problems over moving flat plate in non-Newtonian media*, Journal of Applied Mathematics and Physics **2** 2014. pp. 8-13
- [18] Bognár G.: *Similarity solution of a boundary layer flow for non-Newtonian fluids*, Int. J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **10** 2009. pp. 1555-1566.
- [19] Briot Ch., Bouquet J.K.: *Étude des fonctions d'une variable imaginaire*, J. Ecole Impériale. Polytechnique, Cashier **36** 1856. pp. 85-131.
- [20] Buongiorno J.: *Convective transport in nanofluids*, ASME J. Heat Transfer, **128** 2005. pp. 240-250. Doi:10.1115/1.2150834
- [21] Cercignani C.: *Shear flow of a granular material*, J. Statist. Phys. **102**, 5-6. 2001. pp. 1407-1415.
- [22] Cheng P., Minkowycz W.J.: *Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, Journal of Geophysical Research **82** 1977. pp. 2040-2044.
- [23] Cheng P., Chang I.-D.: *Buoyancy induced flows in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surface*, Int. J. Heat Mass Transfer **19** 1976. pp. 1267-1272.
- [24] Christopher D.M., Wang B-X.: *Marangoni convection around a bubble in microgravity, heat transfer*, in: Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference, Taylor and Francis, Levittown, PA, **3** 1998. pp. 489-494.
- [25] Christopher D.M., Wang B.: *Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface*, Int. J. Thermal Sci. **40** 2001. pp. 564-570.
- [26] Christopher D.M., Wang B-X.: *Similarity simulation for Marangoni convection around a vapor bubble during nucleation and growth*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **44** 2001. pp. 799-810.
- [27] Congedo P.M., Collura S., Congedo P.M.: *Modeling and analysis of natural convection heat transfer in nanofluids*, In: Proc. ASME Summer Heat Transfer Conf. 2009., **3** 2009. pp. 569-579.
- [28] Cortell R.: *Numerical solutions of the classical Blasius flat-plate problem*, Appl. Math. Comput., **170** 2005. pp. 706-710.
- [29] Das S. K., Choi S. U. S., Yu W., Pradeep T.: *Nanofluids: Science and Technology*, Wiley, New Jersey, 2007.
- [30] Dénes J., Patkó I.: *Computation of boundary layers*, Acta Polytechnica Hungarica, **1** 2004. pp. 79-87.
- [31] Furumoto A.S.: *A systematic program for geothermal exploration on the island of Hawaii*, paper presented at the 45th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Denver, CO. Oct. 12-16, 1975.
- [32] Gryglaszewski P., Saljnikov V.: *Universelles mathematisches Modell für den Grenzschichtfall mit natürlicher Konvektion in Nicht-Newtonischen Flüssigkeiten*, Zeit. Angew. Math. Mech. (ZAMM), **69** 1989. pp. 661-664.

- [33] Haff P.: *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*, J. Fluid. Mech. **134** 1983. pp. 401-430.
- [34] He J.H.: *Approximate analytical solution of Blasius equation*, Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul., **3** 1998. pp. 260-263.
- [35] He J.H.: *A simple perturbation approach to Blasius equation*, Appl. Math. Comput., **140** 2003. pp. 217-222.
- [36] Ho C.J., Chen M.W., Li Z.W.: *Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity*, Int. J. Heat & Mass Transfer, **51** 2008. pp. 4506-4516.
- [37] Ince E. L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publ., New York, 1956.
- [38] Ingham D.B., Pop I. (Eds): *Transport Phenomena in Porous Media*, Oxford, 1998., **II** 2002., **III** 2005.
- [39] Ingham D.B., Bejan A., Mamut E., Pop I.: *Emerging Technologies and Techniques in Porous Media*, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Springer Netherlands, **134** 2004. doi: 10.1007/978-94-007-0971-3
- [40] Ishak A.: *Similarity solution for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition*, Appl. Math. Comput., **217** 2010. pp. 837-842.
- [41] Jaluria Y.: *Fluid Flow Phenomena in Materials Processing – The 2000 Freeman Scholar Lecture*, Journal of Fluids Engineering, **123** 2001. pp. 173-210.
- [42] Jiao D., Sharma M.M.: *Investigation of Dynamic Mud Cake Formation: The Concept of Minimum Overbalance Pressure*, SPE 26323, Proceedings of the SPE 68th Annual Technical Conference & Exhibition, Houston, TX, October 3-6, 1993.
- [43] Kechil S.A., Hashim I.: *Series solutions of boundary-layer flows in porous media with lateral mass flux*, Heat Mass Transfer, **44** 2008. pp. 1179-1186.
- [44] Lai F.C.: *Mixed Convection in Saturated Porous Media*. In Handbook of porous media (ed. K. Vafai), Marcel Dekker, New York 2000. pp. 605-661.
- [45] Lesnic D., Ingham D.B., Pop I.: *Free convection boundary-layer flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating*, Int. J. of Heat and Mass Transfer **42** 1999. pp. 2621-2627.
- [46] Li H., Toscani G.: *Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows*, Arch. Ration. Mech. Anal. **172**, 3. 2004. pp. 407-428.
- [47] Liao S.J.: *An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius viscous flow problems*, Int. J. Non-Linear Mech., **34** 1999. pp. 759-778.
- [48] Magyari E.: *The moving plate thermometer*, Int. J. Therm. Sci., **47** 2008. pp. 1436-1441.
- [49] Magyari E.: *Comment on „A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition” by A. Aziz*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2009; **14**:1064-8, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **16** 2011. pp. 599-601.

- [50] Magyari E., Keller B.: *Exact analytic solutions for free convection boundary layers on a heated vertical plate with lateral mass flux embedded in a saturated porous medium*, Heat Mass Transfer, **36** 2000. pp. 109-116.
- [51] Magyari E., Chamkha A.J.: *Exact analytical solutions for thermosolutal Marangoni convection in the presence of heat and mass generation or consumption*, Heat Mass Transfer, **43** (2007), 965-974.
- [52] Napolitano L.G.: *Marangoni boundary layers*, in Proceedings of the 3rd European Symposium on Material Science in Space, Grenoble, France, June 1979.
- [53] Nazar R., Arifin N.M., Pop I.: *Free convection boundary layer flow over vertical and horizontal flat plates embedded in a porous medium unde mixed thermal boundary conditions*, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer **33** 2006. pp. 87-93.
- [54] Nield D.A., Bejan A.: *Convection in Porous Media*, 2nd ed. Springer, New York 1999.
- [55] Paullet J.E.: *An uncountable number of solutions for BVP governing Marangoni convection*, Math. Comput. Modelling **52** 2010. pp. 1708-1715.
- [56] Pop I., Ingham D.B.: *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, Oxford 2001. pp. 381-430.
- [57] Rees D.A.S., Pop, I.: *Free convection induced by a vertical wavy surface with uniform heat flux in a porous medium*. J. Heat Transfer **117** 1995. pp. 547-550.
- [58] Shvets Y.I., Vishnevskiy V.K.: *Effect of dissipation on convection heat transfer in flow of non-Newtonian fluid*. Heat Transfer-Soviet Research **19** 1987. pp. 38-43.
- [59] Slavtchev S., Miladinova S.: *Thermocapillary flow in a liquid layer at minimum in surface tension*, Acta Mech. **127** 1998. pp. 209-224.
- [60] Toscani G.: *Kinetic and hydrodynamic models of nearly elastic granular flows*, Monatsh. Math. **142**, 1-2. 2004. pp. 179-192.
- [61] Vajravelu K., Sastri K.S.: *Fully developed laminar free convection flow between two parallel vertical walls*, I. Int. J. Heat Mass Transf. **20** 1977. pp. 655-660.
- [62] Vajravelu K., Cannon J.R., Leto J., Semmoum R., Nathan S., Draper M., Hammock D.: *Nonlinear convection at a porous flat plate with application to heat transfer from a dike*, J. Math. Anal. Appl. **277** 2003. pp. 609-623.
- [63] Vajravelu K., Prasad K.V., Van Gorder R.A., Lee J.: *Free convection boundary layer flow past a vertical surface in a porous medium with temperature-dependent properties*, Transp. Porous Med. **90** 2011. pp. 977-992. doi: 10.1007/s11242-011-9827-5
- [64] Villani C.: *Topics in optimal transportation*, 58 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [65] Villani C.: *Mathematics of granular materials*, J. Statist. Phys. **124** 2006. pp. 781-822.
- [66] Zhang Y., Zheng L., Wang X., Song G.: *Analysis of Marangoni Convection of Non-Newtonian Power Law Fluids with Linear Temperature Distribution*, Thermal Science, **15** 2011. pp. 45-52. doi: 10.2298/TSCI11S1045Z

- [67] Zheng L., Zhang X., Gao Y.: *Analytical solution for Marangoni convection over a liquid-vapor surface due to an imposed temperature gradient*, Math. Comput. Modelling, **48** 2008. pp. 1787-1795.
- [68] Zheng L., Zhang X., He J.: *Suitable heat transfer model for self-similar laminar boundary layer in power law fluids*, J. Thermal Science, **13** 2004. pp. 150-154.
- [69] Zheng L.-C., Chen X.-H., Zhang X.-X., He J.-C.: *An Approximately Analytical Solution for the Marangoni Convection in an In-Ga-Sb System*, Chin. Phys. Lett., **21** 2004. pp. 1983-1985.